MATEMÁTICAS básicas para la COMPUTACIÓN

Eleanor H. Ninestein

Scott Foresman

trillas

Fibonacci
1180–1240

Siglo XII

1100 Omar Khayyam escribe acerca de la resolución de ecuaciones cúbicas con base en la geometría. Obras árabes, incluyendo las de al-Khowarizmi, se traducen por estudiosos tales como:

1120 Adelardo de Bath,

1140 Roberto de Chester y

1150 Gerardo de Cremona.

Siglo XIII

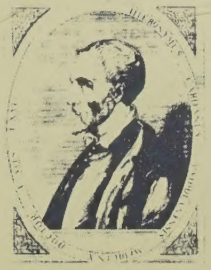
1200 Los autores de obras matemáticas empiezan a usar símbolos en lugar de palabras.

1202 Leonardo de Pisa (Fibonacci) escribe *Liber Abbaci*, donde utiliza numerales indoarábigos para resolver problemas.

1240 John de Halifax (Sacrobosco) escribe *Algorismus vulgaris*, que contribuye a introducir en Europa los numerales indoarábigos y la notación de valor posicional.

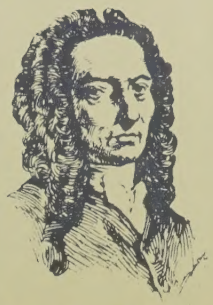
Siglo XIV

1360 Nicole Oresme da una de las primeras representaciones gráficas de la relación entre dos cantidades.



Girolamo Cardano
1501–1576

René Descartes
1596–1650



Abraham De Moivre
1667–1754

Siglo XV

1400 En Europa, los algoritmos que utilizan numerales empiezan a sustituir al ábaco en la realización de operaciones aritméticas.

1478 Se edita el primer libro de aritmética con tipos móviles en Italia.

Siglo XVI

1500 La simbología de las matemáticas empieza a tomar su forma actual.

1525 Christoff Rudolff introduce el signo de radical en *Die Coss*.

1545 Girolamo Cardano publica la solución de las ecuaciones generales de tercer y cuarto grado en *Ars Magna*.

1550 Robert Recorde utiliza por primera vez el signo de igual.

1585 Simon Stevin publica el primer tratamiento sistemático de las fracciones decimales en *La Disme*.

Siglo XVII

1614 John Napier introduce los logaritmos para facilitar la realización de operaciones.

1622 William Oughtred utiliza escalas logarítmicas corredizas para construir una regla de cálculo.

1637 René Descartes sienta las bases de la geometría analítica.

1642 Blaise Pascal construye una calculadora para sumar y restar.

1654 Pierre Fermat y Blaise Pascal fundan la teoría de probabilidades.

1694 Gottfried Wilhelm von Leibniz termina la construcción de una calculadora que sumaba, restaba y multiplicaba.

Traducción Rodolfo Piña García

Revisión técnica Abelardo Pérez Uzcanga
Catedrático en Informática, Universidad
Nacional Autónoma de México

Scott, Foresman and Company

MATEMÁTICAS básicas para la COMPUTACIÓN

Eleanor H. Ninestein

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, España
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

Catalogación en la fuente

Ninestein, Eleanor H.
Matemáticas básicas para la computación.
México : Trillas, 1991.
531 p. : il. ; 24 cm.
Traducción de: Introduction to computer mathematics
Incluye índices
ISBN 968-24-3279-0

1. Matemáticas. 2. Procesamiento electrónico de datos. I. t.

LC-QA76'N5.5 *D-519.4'N399m*

Título de esta obra en inglés:
Introduction to Computer Mathematics
Versión autorizada en español de la
primera edición publicada en inglés por
Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois,
Estados Unidos de América. *Reservados todos los derechos*

La presentación y disposición en conjunto de
MATEMÁTICAS BÁSICAS PARA LA COMPUTACIÓN
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados en lengua española
© 1991. Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
C. P. 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, marzo 1991
ISBN 968-24-3279-0

Impreso en México

Printed in Mexico

Prefacio

Este libro proporciona las bases de matemáticas para los estudiantes que desean estudiar programación de computadoras o campos afines, como el procesamiento de datos. Debido a su flexibilidad, puede adaptarse para un grupo indisciplinado de estudiantes de ciencias y humanidades.

Muchos de los estudiantes que toman un curso de matemáticas para computación no tienen experiencia en programación, pero sí contacto con las matemáticas. Puesto que los procesos mentales requeridos en la solución de problemas matemáticos con frecuencia se aplican también en la programación de computadoras, el libro enlaza estas dos disciplinas. Los temas tratados enfatizan las habilidades transferibles tales como el uso de fórmulas, la manera de desglosar en la solución de problemas, la abstracción de casos específicos a problemas generales y la identificación de aspectos comunes en temas diferentes. En un campo tan cambiante como el de la computación, la capacidad de pensar es la habilidad más importante que puede desarrollar un estudiante.

A últimas fechas se ha hecho énfasis en la importancia de los algoritmos en los planes de estudio para estudiantes de computación. Sin embargo, existe la necesidad de un texto que dé más atención al *pensamiento algorítmico* que a los *algoritmos*. No hay dicotomía entre el método tradicional para resolver problemas por razonamiento deductivo y el contemporáneo que emplea técnicas específicas. Razonamiento y técnicas, intuición y acción, deben ser inseparables. Con este fin, este texto enfatiza más la importancia de la comprensión intuitiva que el desarrollo riguroso de las ideas. El enfoque que se sigue en el libro es el desarrollo de algoritmos generales a partir de ejemplos particulares.

Los algoritmos se introducen en el capítulo 1 y se enuncian a lo largo de todo el libro, de la manera más simple y directa posible. La

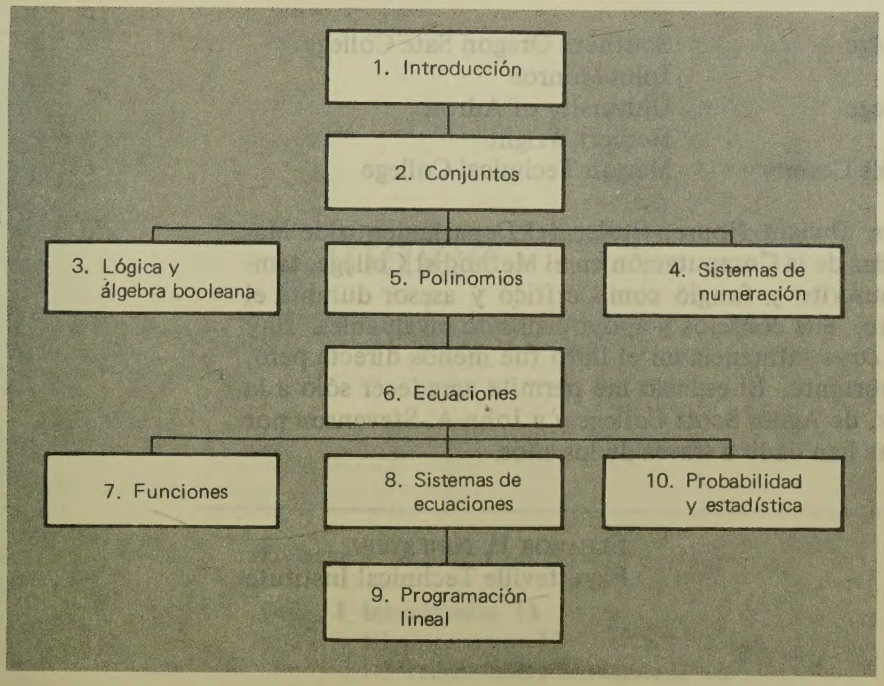
mayoría de ejercicios dirige al estudiante para que exprese los algoritmos en forma estructurada utilizando el pseudocódigo o diagramas de flujo, permitiendo que el instructor enfatice éstos; además brinda a los estudiantes la oportunidad de practicar el desarrollo de algoritmos sin tener que empezar siempre desde el mismo punto de partida.

Así, el estudiante podrá probar su comprensión en el nivel que Donald Knuth señala, es decir, "una persona no ha comprendido realmente algo hasta que puede enseñarle a una computadora cómo hacerlo". Los estudiantes que conozcan algún lenguaje de programación podrán desarrollar la mayoría de los algoritmos en programas cortos.

Los problemas del pseudocódigo y de los diagramas de flujo se indican con el símbolo ⇒ para distinguirlos de los problemas de rutina. Los problemas indicados con un asterisco (*) presentan una dificultad mayor (y deben asignarse con reservas), o bien introducen conceptos adicionales relacionados con el texto, pero no tratados en éste. Muchos de estos problemas incluyen aplicaciones a la programación de computadoras, pero no requieren conocimientos previos de programación. Las sucesiones y las series, la paridad y la notación polaca, son ejemplos de temas suplementarios. Las respuestas a los problemas de rutina impares se indican en la sección correspondiente al final del libro. No se presentan las respuestas de los problemas con asterisco, pero muchas son sencillas, aunque se requiere perceptividad para controlarlas. Si los estudiantes ven las respuestas inmediatamente, no obtendrán los beneficios previstos al trabajar los problemas paso por paso.

Los cursos de matemáticas para computación son muy diversos. Puede darse como un curso de procesamiento de datos o bien como uno de matemáticas; puede durar apenas un trimestre, con un sólido conocimiento de álgebra, o hasta dos semestres, incluyendo una revisión de álgebra. Este libro está organizado para que el instructor prepare el curso que cumpla con las necesidades de sus alumnos. Aun cuando no se traten en clase los capítulos relacionados con el álgebra, algunos estudiantes (en particular los individuos maduros y con gran motivación que regresan a la escuela después de varios años) encontrarán de utilidad dichos capítulos como referencia de revisión. Con excepción de los temas de álgebra, cada capítulo es independiente de los demás. En un curso trimestral se estudiarían los capítulos 1, 2, 3 y 4, con temas seleccionados del 7 y 8, así como del 9 o del 10. En un curso de dos trimestres o de un semestre se estudiarían los capítulos 1 al 6, con temas seleccionados del 7 y 8. En un curso de dos semestres podría cubrirse el libro completo. En el diagrama siguiente se indica la relación entre los capítulos.

Para el instructor, las características principales de este texto son su flexibilidad, el énfasis en el pensamiento algorítmico, el gran número de problemas, el material de enriquecimiento y las referencias



bibliográficas (las cuales son fuentes adecuadas para los informes de los alumnos) del final de cada capítulo.

Para el estudiante, las características principales son la sencillez, el gran número de ejemplos detallados, las aplicaciones a la programación de computadoras, los resúmenes de capítulo y las pruebas de capítulo. Las notas biográficas se incluyen por recreación y para recordar al estudiante que las matemáticas, inclusive en el contexto de la computación son el resultado del esfuerzo humano.

Son muchas las personas que intervinieron en la elaboración de este texto. Agradezco a Michael McLaurin el ajuste de mi horario de clases para dedicarme al libro. Agradezco también la atención del personal de Scott, Foresman and Company. Un agradecimiento especial a Steve Quigley, Barbara Maring y Marisa L. L' Hereux por su paciencia, su agudeza y su constante optimismo. También mi agradecimiento a los siguientes revisores, quienes hicieron numerosas sugerencias útiles:

Kathleen Carlborg
Prairie State College
Norman Carson
Marion Technical College
Caroline Goodman
Neal Howard
Danville Community College
Marilyn Mays
North Lake College
Robert A. McCoy

Parkland College — Southern Oregon Sate College
James Hall — John Monroe
Parkland College — University of Adron
James Hodge — Herbert Wright
College of Lake County — Marion Technical College

Mi esposo, Dr. Dwight House, titular del Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación en el Methodist College, también leyó el manuscrito y fungió como crítico y asesor durante el proyecto completo. Sus consejos y apoyo han sido invaluables. Hay muchas personas cuya influencia en el libro fue menos directa pero, no obstante, importante. El espacio me permite agradecer sólo a la Dra. Sara L. Ripy, de Agnes Scott College y a John A. Stevenson por el estímulo que me han dado a través de los años.

ELEANOR H. NINESTEIN
Fayetteville Technical Institute

Índice de contenido

Prefacio 5

Cap. 1 Introducción 13
1.1 Algoritmos 13
1.2 Programación estructurada 18
1.3 Pseudocódigo y diagramas de flujo 23
Bibliografía complementaria 35

Cap. 2 Conjuntos 37
2.1 Notación de conjuntos 37
2.2 Diagramas de Venn 44
2.3 Diagramas de Venn con tres conjuntos 48
2.4 Conjuntos de números 53
2.5 Notación científica y dígitos significativos 58
2.6 Orden de las operaciones 65
2.7 Propiedades de los números reales 70
2.8 Aritmética de los números enteros 77
Bibliografía complementaria 87

Cap. 3 Lógica y álgebra booleana 89
3.1 Lógica simbólica 89
3.2 Tablas de verdad 95
3.3 Proposiciones compuestas 103
3.4 La condicional 108
3.5 Tablas de verdad con la condicional 112
3.6 Decisiones 123
3.7 Álgebra booleana 127
3.8 Circuitos 132
Bibliografía complementaria 145

Cap. 4 Sistemas de numeración 147
4.1 Enteros base dos **147**
4.2 Fracciones base 2 **155**
4.3 Aritmética binaria **161**
4.4 Aritmética de complementos **171**
4.5 Números negativos **177**
4.6 Conversiones octales, hexadecimales y decimales **181**
4.7 Conversiones octales, hexadecimales y binarias **186**
4.8 Aritmética octal y hexadecimal **191**
Bibliografía complementaria **203**

Cap. 5 Polinomios 205
5.1 Exponentes **205**
5.2 Reglas adicionales de exponentes **210**
5.3 Adición y multiplicación de expresiones algebráicas **216**
5.4 Factorización **223**
5.5 Expresiones racionales **228**
5.6 Suma y resta de expresiones racionales **235**
5.7 Polinomios en forma anidada **242**
Bibliografía complementaria **249**

Cap. 6 Ecuaciones 251
6.1 Ecuaciones y desigualdades lineales **251**
6.2 Fórmulas **257**
6.3 Problemas en lenguaje común **262**
6.4 Ecuaciones cuadráticas **271**
6.5 La fórmula cuadrática **275**
6.6 Ecuaciones de grado superior **281**
6.7 Ecuaciones con expresiones racionales **288**
6.8 La declaración de asignación **295**
Bibliografía complementaria **303**

Cap. 7 Funciones 305
7.1 Funciones **305**
7.2 Graficación **311**
7.3 Funciones lineales **318**
7.4 Funciones cuadráticas **324**
7.5 Funciones polinómicas y gráficas de computadora **328**
7.6 Las funciones exponencial y logarítmicas **335**
Bibliografía complementaria **349**

Cap. 8 Sistemas de ecuaciones 351
8.1 Sistemas de dos ecuaciones **351**
8.2 Sistemas de tres ecuaciones **359**
8.3 Método de eliminación de Gauss **364**

8.4 El método Gauss-Seidel **371**
8.5 Regla de Cramer **376**
8.6 Matrices **385**
8.7 Matrices inversas y ecuaciones matriciales **393**
Bibliografía complementaria **405**

Cap. 9 Programación lineal 407
9.1 Programación lineal **407**
9.2 Desigualdades lineales **412**
9.3 Graficación **417**
9.4 Problemas de lenguaje común **423**
9.5 El método símplex **426**
9.6 Justificación del método símplex **434**
9.7 Problemas de minimización **438**
Bibliografía complementaria **447**

Cap. 10 Probabilidad y estadística 449
10.1 Probabilidad **449**
10.2 Principios de conteo **455**
10.3 Eventos independientes y probabilidad condicional **461**
10.4 Medidas de tendencia central **467**
10.5 Medidas de dispersión **473**
10.6 Histogramas y la curva normal **478**
10.7 Estimación de la media de una población **485**
Bibliografía complementaria **495**

Apéndice. Números con signo 497

Respuestas a algunos ejercicios 501

Índice analítico 527

1

Introducción

Así como el telar de Jacquard utilizaba tarjetas perforadas para controlar la trama de los tejidos, el diseño de una máquina calculadora programable realizado por Charles Babbage en el siglo XIX incluía el uso de tarjetas perforadas para controlar la serie de pasos necesarios para resolver un problema. En ocasiones, los programadores de computadoras se refieren a los pasos para resolver un problema como ***algoritmo.***

1.1. ALGORITMOS

En 1842, Ada Augusta, condesa de Lovelace, realizó una importante observación acerca de la máquina calculadora de Charles Babbage. Escribió: "La máquina analítica no pretende crear nada. Puede hacer cualquier cosa que sepamos cómo ordenarle". El programador de computadoras contemporáneo expresa la misma idea cuando dice: "La computadora hizo lo que le dije, no lo que yo quería".

Para resolver un problema es necesario indicar a la computadora, paso a paso, qué debe hacer. La palabra *algoritmo* se emplea, en matemáticas y en programación de computadoras, para describir una lista de reglas destinadas a resolver un problema.

Definición

Algoritmo es una serie de pasos que llevarán a la solución de un problema dado en un número finito de pasos.

Casi siempre los algoritmos se diseñan de modo que sean generales; es decir, se formulan con variables para que puedan resolverse problemas diferentes del mismo tipo. En la programación de compu-

tadoras, una variable puede pensarse como el nombre de un almacenamiento o lugar de memoria, y puede contener sólo un valor a la vez. Cada lenguaje de computación tiene reglas para denominar a las variables. En general, no es necesario que el nombre de una variable sea una sola letra, como es el caso en álgebra; es una práctica común emplear palabras o abreviaturas que recuerden al programador lo que se almacena en una variable. Por ejemplo, TARIFA y HRS podrían representar los honorarios por hora y el número de horas trabajadas, respectivamente, de una persona.

El desarrollo de un algoritmo es una tarea en gran medida independiente del lenguaje de computación que se usará. Con frecuencia se aplica la técnica de "arriba-abajo" para descomponer un problema en varios problemas de menor extensión, y cada uno de éstos puede dividirse en problemas aún menores. Es importante saber cuál es la información disponible y cuál es la que se busca. Con frecuencia, los algoritmos se inician con una entrada (por ejemplo, obteniendo los datos necesarios para resolver el problema) y terminan con un resultado (por ejemplo, la presentación de la solución).

El primer paso para saber escribir algoritmos es aprender a leerlos. Un repaso puntual consiste en examinar detenidamente los pasos, uno por uno, tal como lo haría una computadora. Un problema común en la programación de computadoras es intercambiar los valores de dos variables. Supóngase que los dos números se llaman PRIMERO y SEGUNDO. Uno podría estar tentado a escribir:

1. Obtener los valores de PRIMERO y SEGUNDO.
2. Asignar a PRIMERO el valor de SEGUNDO.
3. Asignar a SEGUNDO el valor de PRIMERO.
4. Presentar los valores de PRIMERO y SEGUNDO.

A fin de repasar puntualmente este algoritmo, se traza una casilla para cada variable, de modo que puedan verse los contenidos en cada paso.

PRIMERO ☐ SEGUNDO ☐

1. El algoritmo está formulado de tal modo que pueden usarse dos números cualesquiera. Supóngase que se usan PRIMERO = 2 y SEGUNDO = 3. Enseguida se asignan estos números a las variables.

   PRIMERO [2] SEGUNDO [3]

2. El valor en curso de SEGUNDO, 3, se asigna a PRIMERO.

   PRIMERO [3] SEGUNDO [3]

(Puesto que las variables sólo pueden contener un valor, el anterior se reemplaza por el nuevo.)

3. El valor en curso de PRIMERO, 3, se asigna entonces a SEGUNDO.

PRIMERO [3] SEGUNDO [3]

4. Primero = 3 y SEGUNDO = 3. Sin embargo, el algoritmo no realizó el intercambio. Se necesita una tercera variable para almacenar temporalmente uno de los valores. El algoritmo del ejemplo 1 indica la manera de resolver el problema.

Ejemplo 1

Repasar puntualmente el algoritmo siguiente para intercambiar los valores de dos variables. Usar A = 2 y B = 3.

1. Obtener los valores de A y B.
2. Asignar el valor de A a una tercera variable, C.
3. Asignar el valor de B a A.
4. Asignar el valor de C a B.
5. Presentar los valores de A y B.

Solución

1. A = 2 y B = 3. Se trazan casillas para representar los lugares de memoria A, B y C y para indicar el valor en curso de cada uno.
2. El valor en curso de A se asigna a C. A [2] B [3] C [ ]
3. El valor en curso de B se asigna a A. A [2] B [3] C [2]
4. El valor en curso de C se asigna a B. A [3] B [3] C [2]
5. El valor de A es ahora 3 y el de B es 2. A [3] B [2] C [2]

Ejemplo 2

Repasar puntualmente el algoritmo siguiente utilizando M = 3 y N = 5.

1. Obtener dos números completos cualesquiera M y N, con M menor que N.
2. Restar M de N y asignar la diferencia a DIF1.
3. Multiplicar N y 10, sumar M y asignar el resultado a GRANDE.
4. Multiplicar M y 10, sumar N y asignar el resultado a CHICO.
5. Restar CHICO de GRANDE y asignar la diferencia a DIF2.
6. Multiplicar DIF1 por 9.
7. Presentar los valores de DIF1 y DIF2.

Solución

Los valores de las variables se muestran después de cada paso.

	M	N	DIF1	GRANDE	CHICO	DIF2
1.	3	5				
2.	3	5	2			
3.	3	5	2	53		
4.	3	5	2	53	35	
5.	3	5	2	53	35	18
6.	3	5	18	53	35	18

7. DIF1 = 18 y DIF2 = 18.

Ejemplo 3

Repasar puntualmente el algoritmo del ejemplo anterior utilizando M = 2 y N = 7.

Solución

A fin de acortar el proceso, se trazará sólo una casilla para cada variable. Cuando el contenido cambie, se tachará el valor anterior y se reemplazará con el nuevo. Los pasos en que cambia el contenido se indican entre paréntesis.

M	N	DIF1	GRANDE	CHICO	DIF2
[2]	[7]	[~~45~~]	[72]	[27]	[45]
(paso 1)	(paso 1)	(pasos 2 y 6)	(paso 3)	(paso 4)	(paso 5)

DIF1 = 45 y DIF2 = 45.

Ejemplo 4

Repasar puntualmente el algoritmo siguiente utilizando NÚMERO = 5.

1. Obtener un número cualquiera, NÚMERO.
2. Multiplicar NÚMERO por NÚMERO.
3. Restar 1 de NÚMERO.
4. Dividir NÚMERO entre 24 y asignar el cociente a COCIENTE; asignar el residuo a RESIDUO.
5. Presentar los valores de COCIENTE y RESIDUO.

Solución

NÚMERO	COCIENTE	RESIDUO
[~~5~~ ~~25~~ 24]	1	[0]
(pasos 1, 2 y 3)	(paso 4)	(paso 4)

COCIENTE = 1 y RESIDUO = 0.

El estudiante empezará a escribir algoritmos en la próxima sección.

Ejercicios

Los problemas 1 al 3 se refieren al algoritmo siguiente. Repasarlo puntualmente utilizando los valores indicados. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. Obtener un número completo N entre 1 y 1000 (inclusive).
2. Asignar a A el valor 7.
3. Multiplicar N por A y asignar el producto a N.
4. Sumar 4 a A.
5. Multiplicar N por A y asignar el producto a N.
6. Sumar 2 a A.
7. Multiplicar N por A y asignar el producto a N.
8. Presentar el valor de N.

1. Usar N = 45. **2.** Usar N = 37. **3.** Usar N = 23.

Los problemas 4 al 6 se refieren al algoritmo siguiente. Repasarlo puntualmente utilizando los valores indicados. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. Obtener un número completo N entre 1 y 104 (inclusive).
2. Asignar N a X. Dividir X entre 3 y asignar el residuo a A.
3. Asignar N a X. Dividir X entre 5 y asignar el residuo a B.
4. Asignar N a X. Dividir X entre 7 y asignar el residuo a C.
5. Multiplicar A por 70 y asignar el producto a A.
6. Multiplicar B por 21 y asignar el producto a B.
7. Multiplicar C por 15 y asignar el producto a C.
8. Sumar A, B y C y asignar la suma a D.
9. Dividir D entre 105 y asignar el residuo a D.
10. Presentar N y D.

4. Usar N = 34. **5.** Usar N = 73. **6.** Usar N = 101.

Los problemas 7 al 9 se refieren al algoritmo siguiente. Repasarlo puntualmente utilizando los valores indicados. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. Obtener dos números completos cualesquiera M y N, con M menor que N.
2. Multiplicar M, N y 2, y asignar el producto a X.
3. Multiplicar M por M.
4. Multiplicar N por N.
5. Restar M de N, y asignar la diferencia a Y.
6. Sumar M y N, y asignar la suma a Z.
7. Presentar X, Y y Z.

7. Usar M = 1 y N = 2. **8.** Usar M = 2 y N = 3. **9.** Usar M = 1 y N = 3.

Los problemas 10 al 12 se refieren al algoritmo siguiente. Repasarlo puntualmente utilizando los valores indicados. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. Obtener un número completo cualquiera, PRIMERO.
2. Sumar 1 a PRIMERO y asignar el resultado a SEGUNDO.
3. Sumar 1 a SEGUNDO y asignar el resultado a TERCERO.
4. Multiplicar PRIMERO, SEGUNDO y TERCERO; asignar el resultado a PRODUCTO.
5. Dividir PRODUCTO entre 6 y asignar el cociente a COCIENTE.
6. Presentar COCIENTE.

10. Usar PRIMERO = 3. **11.** Usar PRIMERO = 8.
12. Usar PRIMERO = 10.

Los problemas 13 al 15 se refieren al algoritmo siguiente. Repasarlo puntualmente utilizando los valores indicados. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. Obtener un número completo cualquiera de tres dígitos, NÚMERO.
2. Dividir NÚMERO entre 100, y asignar el cociente a IZQUIERDA; asignar el residuo a NÚMERO.
3. Dividir NÚMERO entre 10, y asignar el cociente a ENMEDIO; asignar el residuo a DERECHA.
4. Presentar los valores de IZQUIERDA, ENMEDIO y DERECHA.

13. Usar NÚMERO = 213. **14.** Usar NÚMERO = 596.

15. Usar NÚMERO = 847.

***16.** ¿Existe alguna relación entre X, Y y Z en el algoritmo de los problemas 7 al 9?
***17.** ¿Es posible que la división del algoritmo de los problemas 10 al 12 tenga en algún caso un residuo diferente de cero? ¿Por qué sí o por qué no?
***18.** ¿Qué hace el algoritmo de los problemas 13 al 15?

1.2. PROGRAMACIÓN ESTRUCTURADA

Los programadores de computadoras reconocen la importancia de elaborar programas que sean fáciles de leer a fin de simplificar las tareas de depuración de errores, mantenimiento y modificación de los mismos, para lo cual se usa la programación estructurada. Los programas estructurados emplean algoritmos que se componen de tres patrones o estructuras: secuenciales, selectivos e iterativas.

La *estructura secuencial* constituye una serie de pasos que deben realizarse, o ejecutarse, en orden. El algoritmo para intercambiar los valores de dos variables emplea una estructura secuencial. Si A y B son las variables, el algoritmo podría escribirse de la manera siguiente:

1. Obtener los valores de A y B.
2. Asignar el valor de A a una tercera variable, C.
3. Asignar el valor de B a A.
4. Asignar el valor de C a B.
5. Presentar los valores de A y B.

Este algoritmo funcionará siempre que se desee intercambiar los valores de dos variables. Pero puede ser necesaria mayor flexibilidad en un algoritmo.

La *estructura selectiva* permite opciones. Un cajero automático debe programarse para sumar si la operación es un depósito y para restar si es un retiro. El algoritmo puede escribirse como se describe a continuación:

1. Obtener la naturaleza y el monto (como un número positivo, AMT) de la operación (por parte del cliente).
2. Obtener el saldo actual del cliente, SAL (del banco de datos de la institución bancaria).
3. Si la operación es un depósito, sumar AMT a SAL. En caso contrario, restar AMT de SAL.
4. Presentar el monto de la operación AMT y el nuevo saldo SAL.

El algoritmo especifica que la cantidad AMT debe ser positiva. ¿Qué ocurriría si se realizara un retiro negativo utilizando este algoritmo? En la práctica, los programadores tratan de prever tales circunstancias e incorporan dispositivos de seguridad en sus programas para evitar dichos errores.

La tercera estructura, la *iterativa*, emplea una serie de pasos que pueden ejecutarse varias veces. Con frecuencia se usa la palabra ciclo para denotar los pasos que se repiten. Una aplicación común de la estructura iterativa es para saber el número de datos que se han procesado. Un programa para calcular promedios escolares procesaría un número diferente de expedientes en cada periodo escolar. La computadora podría contar el número de expedientes. Se necesita una variable para almacenar la cuenta. Se llama *contador*, y se le asigna el valor 0 al principio, en caso de que otro valor esté almacenado ahí. La asignación de un valor (con frecuencia 0, pero no siempre) a una variable antes de que se use en algún cálculo se llama *inicialización* de la variable. A continuación se presenta el algoritmo:

1. Asignar a la variable denominada CONTADOR el valor 0.
2. Repetir los pasos 3 y 4 hasta que se procese el último expediente escolar.
3. Obtener y procesar un expediente escolar.
4. Sumar 1 a CONTADOR.
5. Presentar el valor de CONTADOR.

Siempre que se usa una estructura iterativa, debe decidirse si se ejecutará el ciclo una vez más o si se sale del mismo. Se dice entonces que se prueba una *condición*. Cuando la condición se prueba al principio del ciclo, se dice que la estructura es un bucle DO WHILE (ejecutar mientras). En tanto la condición de ejecución se satisface en ese punto, el ciclo se ejecutará. Es necesario considerar dos cosas: primero, la condición debe inicializarse antes de entrar en el ciclo; segundo, la condición debe cambiarse dentro del ciclo para que éste no se repita indefinidamente.

Con frecuencia es necesario sumar una serie de números en la programación de computadoras; entonces se guarda un total corriente (o parcial) en una variable llamada *acumulador*. El primer paso consiste en inicializar el acumulador, tal como se hizo con el contador del problema anterior. La condición de ejecución será que haya más números. La computadora debe ser capaz de identificar cuándo ha encontrado el último dato. En ocasiones, se usa un valor "falso" para señalar el final de las entradas. Podría llamársele *marca de final*. A continuación se presenta el algoritmo para este problema. El ciclo se indica en negritas.

1. Asignar a TOTAL el valor 0 (por ejemplo, inicializar el total).
2. Obtener el primer número, NUM.
3. Mientras NUM no sea la marca de final, ejecutar los pasos 4 y 5.
4. Sumar NUM a TOTAL.
5. Obtener el número siguiente y asignarlo a NUM.
6. Presentar el valor de TOTAL.

Después de encontrarse la marca de final en el paso 5, la condición de ejecución se prueba al principio del ciclo (paso 3). La condición no se satisface, por lo que se abandona el ciclo y la ejecución continúa en el paso 6. El valor de TOTAL se presenta una sola vez, ya que el paso 6 se ejecuta *fuera* del ciclo.

Si el algoritmo estuviera escrito de la manera siguiente, el valor de TOTAL se presentaría cada vez que se sumara un número, ya que el paso 5 está *dentro* del ciclo.

1. Asignar al acumulador TOTAL el valor 0 (por ejemplo, inicializar el total).
2. Obtener el primer número, NUM.
3. Mientras NUM no sea la marca de final, ejecutar los pasos 4 al 6.
4. Sumar NUM a TOTAL.
5. Presentar el valor de TOTAL.
6. Obtener el número siguiente y asignarlo a NUM.

Una de las razones para estudiar matemáticas es practicar la solución de problemas y el desarrollo de algoritmos. Sin embargo, en matemáticas se acostumbra resolver problemas *específicos,* mientras que en la programación de computadoras deben resolverse problemas *generales.* Una técnica empleada en el desarrollo de algoritmos para problemas generales es resolver primero el problema para datos específicos.

El reflexionar sobre los pasos empleados para resolver el problema específico será de ayuda para escribir un algoritmo general. Esta técnica se usa constantemente en los capítulos siguientes y en los ejemplos de esta sección.

Ejemplo 1

Desarrollar un algoritmo para encontrar el promedio de una cantidad n números.

Solución

Primero se resuelve un problema específico. Encontrar el promedio de cuatro números: 100, 50, 82 y 76. Se acumularía el total: $100 + 50 + 82 + 76 = 308$. Después se dividiría entre 4: $308 \div 4 = 77$. En el algoritmo general se necesitará un acumulador para la suma. Puesto que se desconoce el valor de n, será necesario contar los números que se vayan sumando. La presencia de acumuladores y contadores sugiere una estructura iterativa.

1. Asignar a TOTAL y a CONTADOR el valor 0.
2. Obtener el primer número, NÚMERO.
3. Mientras NÚMERO no sea la marca de final, ejecutar los pasos 4 al 6.
4. Sumar número a TOTAL.
5. Sumar 1 a CONTADOR.
6. Obtener el número siguiente, NÚMERO.
7. Dividir TOTAL por CONTADOR a fin de obtener PROMEDIO.
8. Presentar PROMEDIO.

Ejemplo 2

Desarrollar un algoritmo para calcular la paga semanal, P, de un empleado, si gana D pesos por hora y trabaja H horas. Las horas de trabajo que excedan las 40 semanales se pagan una vez y media.

Solución

Supóngase que la tarifa es a $ 6.00 la hora y que el tiempo son 35 horas. La paga sería 35 × $ 6.00, o $ 210.00. Pero por 45 horas, la paga sería 40 × $ 6.00, o $ 240.00 por las primeras 40 horas y

5 × $ 9.00, o $ 45.00 por las 5 horas restantes, para un total de $ 285.00. Puesto que hay una opción, se necesita una estructura selectiva. A continuación se presenta el algoritmo.

1. Obtener la tarifa D y el tiempo H.
2. Si H es menor que 40, entonces multiplicar D por H para obtener la paga semanal P. En caso contrario, realizar los pasos 3 al 6.
3. Multiplicar 40 por la tarifa por hora D para obtener la paga regular.
4. Calcular la tarifa de tiempo extra como 1.5 × tarifa por hora D.
5. Restar 40 del tiempo H y multiplicar la diferencia por la tarifa de tiempo extra para obtener la paga correspondiente.
6. Sumar la paga regular y la de tiempo extra para obtener la paga semanal P.
7. Presentar el valor de P.

Ejercicios

Resolver todos los problemas utilizando los números indicados. Escribir después un algoritmo general utilizando las variables. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. Una mercancía se vende a LISTA pesos. Si tiene una rebaja de una TASA por ciento, escribir un algoritmo para determinar el monto del descuento (DESC) y el precio de venta (VENTA). LISTA = $ 595 y TASA = 15.
2. Una persona llena el tanque de gasolina con L litros, maneja M kilómetros, duerme por la noche, y maneja N kilómetros antes de llenar el tanque otra vez. Escribir un algoritmo para determinar el número de kilómetros por litro que rinde su automóvil. L = 40 litros, M = 198 kilómetros y N = 262 kilómetros.
3. Supóngase que una persona pide prestados B pesos al R por ciento anual y que el pago mensual es de D pesos. Escribir un algoritmo para determinar la cantidad de intereses adeudados (I) al término de un mes y la cantidad que se destina a la amortización del principal (P), y asignar el principal pendiente a B. B = $ 500, R = 12 y D = $ 23.54.
4. Una persona gana SALARIO pesos al año y tiene NUM dependientes. Si hay una exención de $ 1 000 por cada dependiente, escribir un algoritmo para determinar el ingreso gravable (ING) y el monto de los impuestos (IMP) adeudados si el gravamen es del TASA por ciento. SALARIO = $ 15 000, NUM = 3 y TASA = 9.
5. A un vendedor se le pagan S pesos semanales más el R por ciento de las ventas que excedan cierta cantidad A. Escribir un algoritmo para encontrar la paga (P) de una semana en la que vendió mercancías por un valor de M pesos. S = $ 300, R = 5, A = $ 5 000 y M = $ 7 000.
6. En algunos estados, los artículos no alimentarios se gravan con el R por ciento y los alimentos están exentos. Escribir un algoritmo para

determinar el monto de los impuestos (T) pagados en una compra de P pesos (todos los artículos de la misma categoría). R = 4 y P = $ 20 en alimentos.

7. Si el saldo bancario de una persona es de SAL pesos, escribir un algoritmo para determinar el nuevo saldo después de realizar varias operaciones, cada una por una cantidad AMT (pero AMT puede ser diferente en cada operación). Usar un depósito de $ 0 para señalar el final de las entradas. SAL = $ 320, se retiran $ 15, se depositan $ 120 y se retiran $ 88.
8. Un encuestador descubre que el número de personas (X) de un total de Y en diferentes esquinas urbanas favorece a cierto candidato político. Escribir un algoritmo para determinar el porcentaje (R) de las personas entrevistadas que favorecen al candidato. Usar 999 para señalar el final de las entradas. X = 40 y Y = 60 en la primera esquina; X = 30 y Y = 50 en la segunda; y X = 25 y Y = 45 en la tercera.
9. Supóngase que una persona tiene una cuenta bancaria que no genera intereses con un saldo de SAL pesos. Si retira la mitad del saldo restante cada fin de mes, escribir un algoritmo para determinar cuánto tiempo se necesitará para disminuir el saldo hasta MIN pesos o menos. SAL = $ 3 200 y MIN = $ 200.
*10. Se ha supuesto que para cualquier número completo N, el algoritmo siguiente producirá en última instancia el valor N = 1. Repasarlo puntualmente utilizando (a) N = 21, (b) N = 53 y (c) N = 80.

    1. Obtener un número completo N entre 1 y 99 (inclusive).
    2. Asignar a contador C el valor 0.
    3. Mientras N sea mayor que 1, ejecutar los pasos 4 y 5.
    4. Si N es par, dividirlo entre 2 y asignar el cociente a N. En caso contrario, multiplicarlo por 3, sumarle 1 y asignar el resultado a N.
    5. Sumar 1 a C.
    6. Presentar C y N.

*11. Si el algoritmo del ejemplo 1 se usa para calcular la calificación promedio de un estudiante, modificarlo para que se adapte a un grupo completo.
*12. Modificar el algoritmo del ejemplo 2 para procesar más de un empleado.
*13. Modificar el algoritmo del ejemplo 2 para que presente un mensaje de error si un empleado trabaja más de 72 horas en una semana.

1.3. PSEUDOCÓDIGO Y DIAGRAMAS DE FLUJO

Al proceso de escribir un algoritmo en un lenguaje de computadora como el COBOL, el BASIC o el Pascal se le llama *codificación.* Es necesario que un algoritmo esté totalmente desarrollado antes de que se codifique. Los programadores de computadoras tienen formas generales para escribir algoritmos, incluso antes de que se codifiquen.

Dos de las formas más comunes son el uso de un pseudocódigo y de diagramas de flujo.

El pseudocódigo se escribe en español utilizando las estructuras secuencial, selectiva e iterativa. El pseudocódigo no está del todo uniformado. En general, cada paso de una estructura secuencial tiene el mismo margen. Los pasos de las estructuras selectiva e iterativa tienen sangría para ayudar a identificar los pasos que se ejecutan juntos. Se acostumbra el uso de las palabras ENDIF (FIN SI) y ENDWHILE (FIN MIENTRAS) para señalar el final de las estructuras selectivas e iterativas, respectivamente. Conforme se revise la notación algebraica del capítulo 2, el estudiante podrá empezar a usarla para abreviar parte del español.

Ejemplo 1

Usar el pseudocódigo a fin de escribir un algoritmo para calcular la cantidad W que se retiene del salario anual S de un empleado por concepto de seguro social, si la tarifa es de R por ciento sobre un máximo de M pesos.

Solución

El algoritmo contiene una estructura selectiva como parte de una estructura secuencial.

```
Obtener los valores de S, R y M.
Sustituir R por 0.01 × R (por ejemplo, cambiar la cifra porcen-
    tual a decimal).
Si S es menor que M, multiplicar S por R para obtener W.
En caso contrario, multiplicar M por R para obtener W.
FIN SI.
Presentar el valor de W.
```

Ejemplo 2

Usar el pseudocódigo para escribir un algoritmo que sume los valores del número total de automóviles en el inventario de una distribuidora automotriz.

Solución

Después de meter el valor del último automóvil, se mete una marca de final. Porque en la realidad un automóvil nunca tendría un valor de $ 9, se usa el número 9.

```
Asignar a TOTAL el valor 0.
Obtener el primer valor, VAL.
Mientras VAL no sea 9,
    Sumar VAL a TOTAL.
```

Obtener el valor siguiente, VAL.
FIN MIENTRAS
Presentar TOTAL.

Obsérvese que el primer valor se obtiene antes de entrar en el bucle y que el último paso de éste es obtener un nuevo valor (en vez de realizar la suma). De este modo, el valor "falso" 9 no se suma al total. En el procesamiento de datos es una práctica común obtener el primer dato antes de iniciar el ciclo para que pueda usarse una señal del final de las entradas de esta manera.

Otro método común para especificar los algoritmos de una computadora es trazar diagramas de flujo, los cuales son representaciones gráficas de un algoritmo. Los símbolos que se usan con mayor frecuencia se ilustran en la figura 1.1.

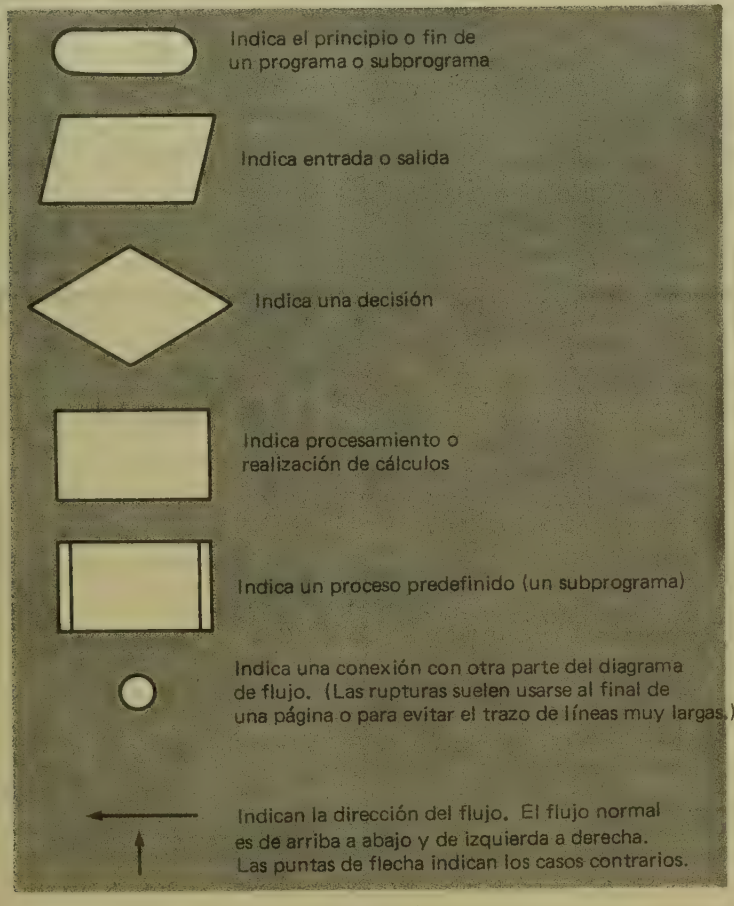


Figura 1.1

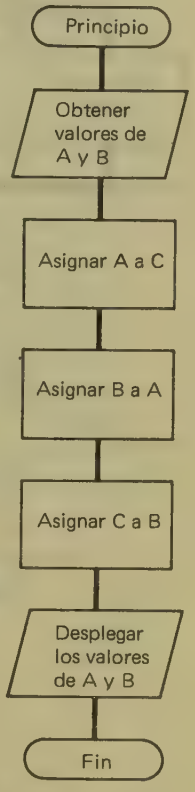


Figura 1.2

Los diagramas de flujo estructurados se trazan mediante el acoplamiento de estos símbolos utilizando las estructuras secuencial, selectiva e iterativa. Se ilustra la estructura secuencial del problema para intercambiar los valores de dos variables. Ver la figura 1.2.

En la figura 1.3 se ilustra la estructura selectiva para el problema de las operaciones bancarias. Los círculos pequeños se usan al principio o al final, porque sólo se está viendo parte del diagrama de flujo. Esta porción se uniría con el resto del diagrama de flujo en el sitio donde ocurre el conector.

Es importante observar que una de las operaciones de una estructura selectiva podría ser "no ejecutar". El diagrama de flujo aparecería como en la figura 1.4 o en la figura 1.5.

En una estructura iterativa, el ciclo se inicia con una decisión de si debe ejecutarse el mismo. Si la condición se satisface, la operación

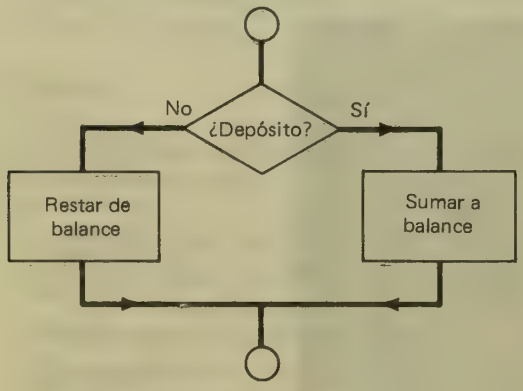


Figura 1.3

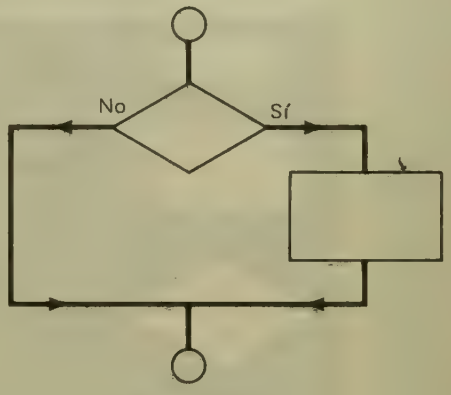


Figura 1.4

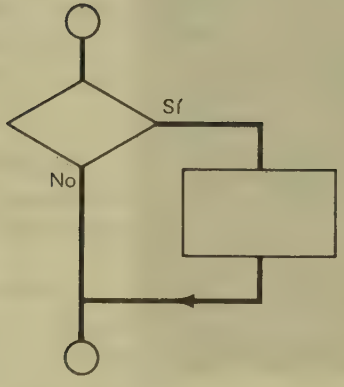


Figura 1.5

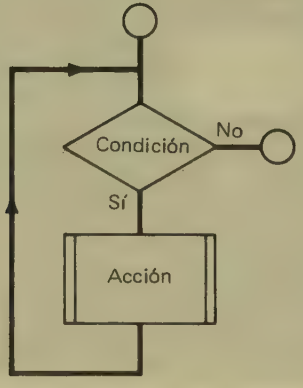


Figura 1.6

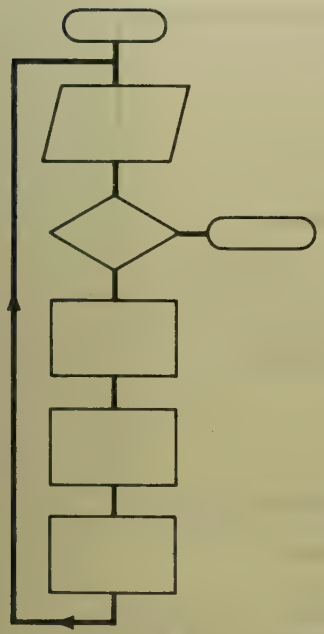
se ejecuta. Si la condición no se satisface al principio, el bucle no se ejecutará en absoluto. En la figura 1.6. se muestra un diagrama de flujo para una estructura iterativa.

Es muy importante que cada estructura tenga sólo un punto de entrada y sólo uno de salida. La operación en este ejemplo no es sólo un paso, sino un algoritmo completo, el cual se mostraría por separado.

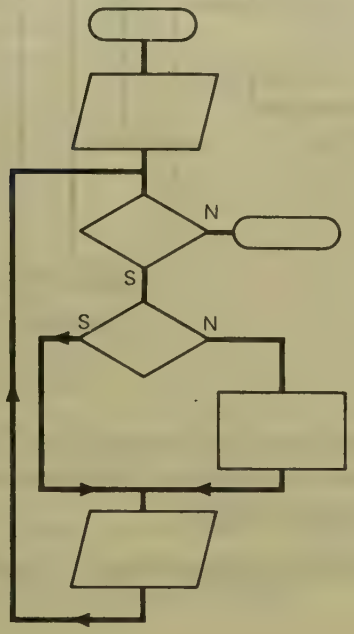
Ejemplo 3

Determinar si los diagramas de flujo siguientes son estructurados. En los que lo sean, identificar las estructuras.

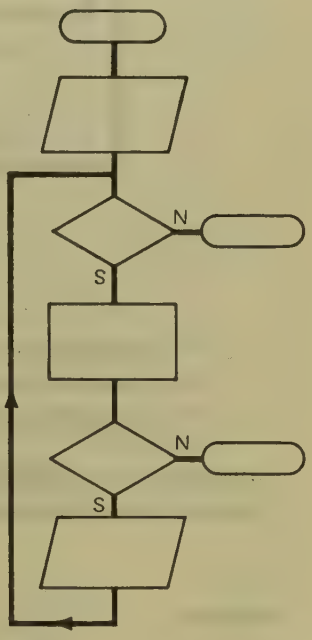
a.



b.

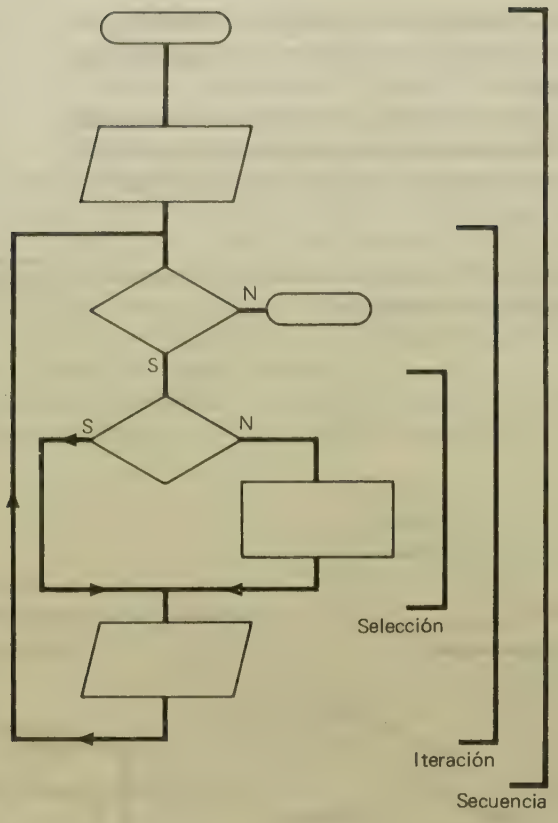


c.



Solución

a. No es estructurado. La estructura iterativa regresaría a una posición inmediatamente antes de la decisión.
b. Es estructurada.



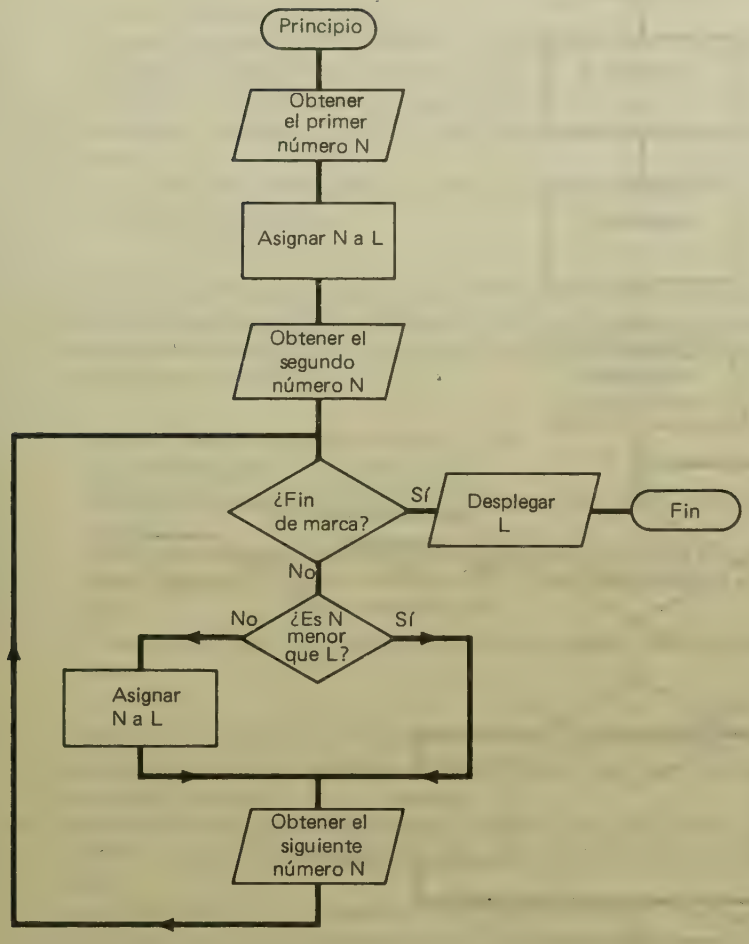
c. No es estructurada. Debe haber un solo punto de salida.
Esta sección termina con el examen de otro problema común en la programación de computadoras.

Ejemplo 4

Construir un diagrama de flujo para encontrar el número mayor L en una lista de números.

Solución

Se empieza suponiendo que el primer número es el mayor. Después se compara el segundo número con el primero. Si el segundo es menor, entonces se pasa al tercero. Si el segundo es mayor que el primero, entonces se tiene un nuevo "mayor" para comparar con el tercero. Los pasos se repiten con cada número sucesivo de la lista hasta que se agota.

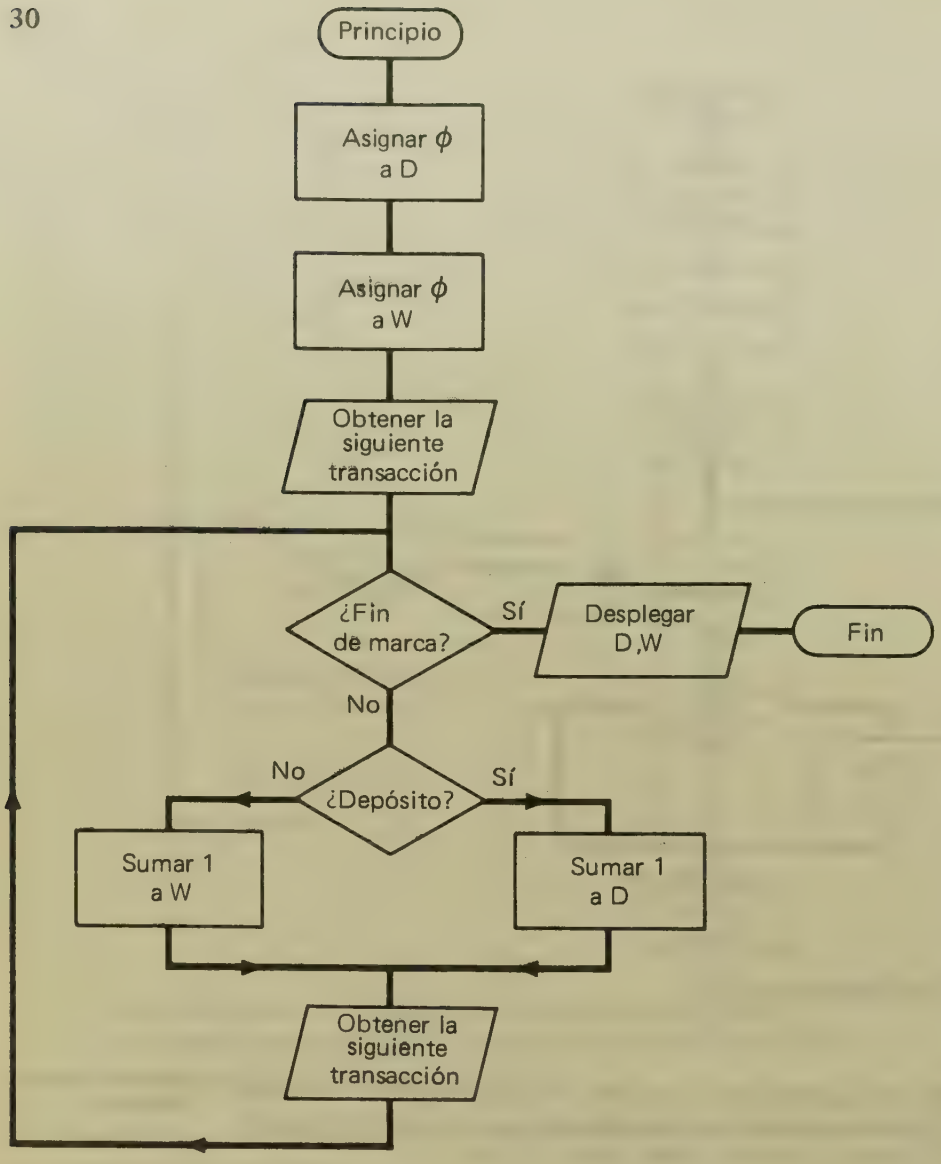


Ejemplo 5

Construir un diagrama de flujo para contar el número de depósitos (D) y el número de retiros (R) realizados por un cliente bancario. Sea que un depósito cero sirva como marca de final.

Solución

Se requiere mucha práctica para dominar la escritura de algoritmos que sigan las estructuras secuencial, selectiva e iterativa, por lo que en el libro se incluyen diversos algoritmos. Se pedirá al estudiante que escriba algunos de ellos en pseudocódigo o que construya diagramas de flujo para que tenga la oportunidad de practicar esta habilidad durante el curso.



Ejercicios

Usar el pseudocódigo para escribir los algoritmos siguientes. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. Si se depositan $ 100 el día primero de cada mes en una cuenta que gana el 12 por ciento de interés anual (1 por ciento mensual), el algoritmo determina el saldo de la cuenta el día último de cada mes durante un año.

1. Asignar al saldo el valor 0.
2. Ejecutar los pasos 3 al 6 doce veces. (Sugerencia: Usar un contador y verificar su valor al principio del ciclo).
3. Sumar $100 al saldo para obtener uno nuevo.
4. Multiplicar el saldo por 0.01 para obtener los intereses depositados.
5. Sumar los intereses al saldo para obtener el nuevo saldo.
6. Presentar el saldo actual.

2. Si se pide un préstamo a tres años por $1 000 al 12 por ciento de interés anual, los pagos mensuales serían de $ 33.21. El algoritmo determina la cantidad que se acredita al pago del principal y la cantidad que se acredita al pago de intereses.

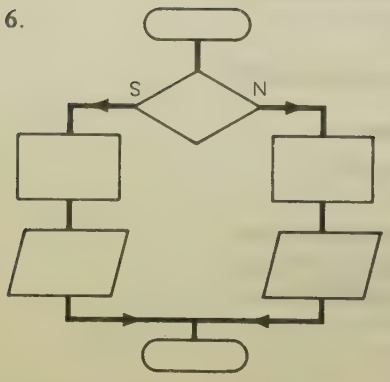
   1. Asignar a saldo adeudado el valor $ 1 000.
   2. Ejecutar los pasos 3 al 6 seis veces.
   3. Multiplicar el saldo adeudado por 0.01 para obtener los intereses de un mes.
   4. Restar los intereses de $ 33.21 para obtener el pago del principal.
   5. Restar el principal pagado del saldo adeudado para obtener el nuevo saldo.
   6. Presentar los intereses pagados, el principal pagado y el saldo adeudado.

3. Generalizar el algoritmo del problema 1 para depositar AMT pesos mensualmente es una cuenta que gana el TASA por ciento de interés durante NUM meses.
4. Generalizar el algoritmo del problema 2 para un principal de SAL pesos al TASA por ciento durante NUM meses con un pago mensual de MES pesos.
5. Un negocio factura a sus clientes de la siguiente manera: Si el pago se realiza dentro de los 30 primeros días, no hay cargo financiero. El cargo es del 12 por ciento anual sobre los saldos insolutos. El algoritmo determina el monto de la factura.

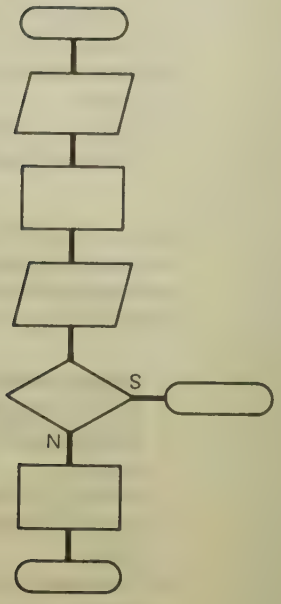
   1. Obtener el saldo anterior (SAL).
   2. Obtener el monto de los pedidos nuevos (PEDIDO).
   3. Obtener los pagos (PAGO) desde la última factura.
   4. Restar PAGO de SAL para obtener el saldo insoluto (SAL).
   5. Si SAL es mayor que cero, entonces multiplicar SAL por 0.01 para obtener el cargo (CARGO) sobre el saldo insoluto. De lo contrario, asignar a CARGO el valor 0.
   6. Sumar SAL, PEDIDO y CARGO para obtener el monto (BAL) de la factura.

¿Cuáles de los siguientes diagramas de flujo son estructurados? Para los que lo sean, identificar las estructuras. Ver el ejemplo 3.

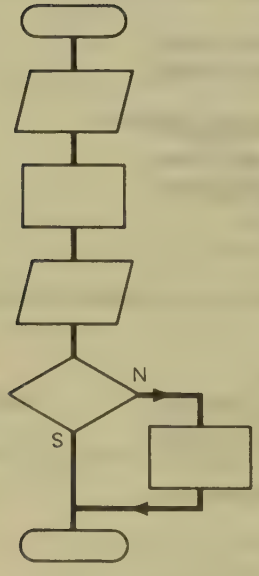
6.



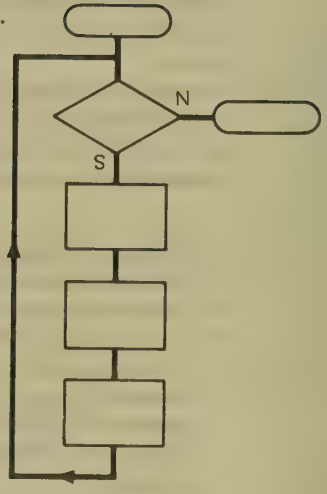
7.



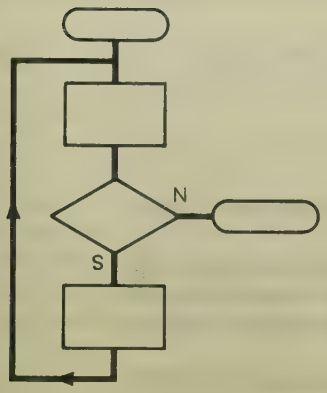
8.



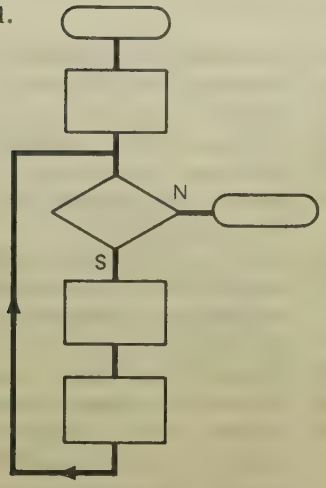
9.



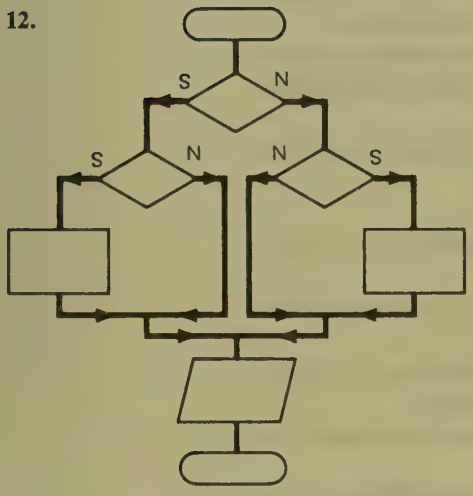
10.



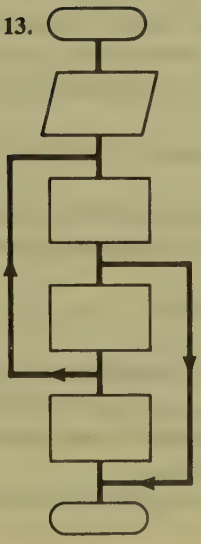
11.



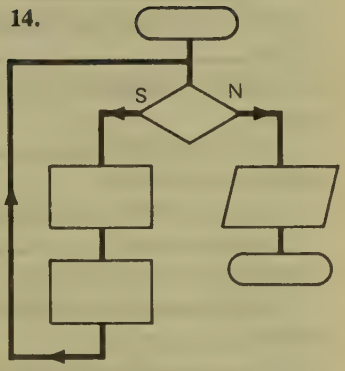
12.



13.



14.



Construir diagramas de flujo para los algoritmos de los problemas siguientes. Ver los ejemplos 4 y 5.

15. Problema 1 de la sección 1.1.
16. Problema 3 de la sección 1.1.
17. Problema 5 de la sección 1.1.
18. Problema 7 de la sección 1.1.
19. Problema 9 de la sección 1.1.
20. Modificar el algoritmo del problema 5 de esta sección para procesar más de un cliente.

*21. Existe una segunda versión de la estructura iterativa que utiliza un ciclo DO UNTIL (ejecutar hasta que). Se prueba una condición al *final* del bucle para determinar si se sale del mismo. Construir un diagrama de flujo para un ciclo DO UNTIL.

*22. Resolver el problema 1 de esta sección utilizando un ciclo DO UNTIL.

*23. Resolver el problema 2 de esta sección utilizando un ciclo DO UNTIL.

*24. Muchos de los lenguajes de programación contienen un ciclo FOR (para), que es en sí uno DO WHILE o DO UNTIL para el cual el número de iteraciones se conoce. Por ejemplo, en el problema 1 se sabe que hay doce iteraciones. El paso 2 podría escribirse "FOR (para) CTR = 1 TO (a) 12, ejecutar los pasos 3 al 6".

(a) ¿Cómo podría modificarse el algoritmo para que el número de meses pudiera meterse como parte de los datos?
(b) ¿En qué condiciones sería mejor usar un ciclo DO WHILE y una marca de final en lugar del ciclo FOR?

Revisión de capítulo

Un _____ es una serie de pasos claros que llevarán a la solución de un problema dado en un número finito de pasos.

Un _____ consiste en examinar detenidamente los pasos de un algoritmo, uno por uno, tal como lo haría una computadora.

La estructura _____ es una serie de pasos que deben realizarse en orden.

La estructura _____ permite opciones.

La estructura _____ emplea una serie de pasos que pueden ejecutarse varias veces.

Con frecuencia se usa la palabra _____ para denotar los pasos que se repiten.

A la asignación de un valor a una variable antes de que se use en algún cálculo se le llama _____ de la variable.

Los programadores suelen escribir sus algoritmos en español en una forma llamada _____ .

Un _____ es una representación gráfica de un algoritmo.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Arganbright, Deane E. "The Electronic Spreadsheet and Mathematical Algorithms", en *The College Mathematics Journal*, Vol. 15 No. 2 (Marzo de 1984), 148-157.

Arndt, A. B. "Al-Khowarizmi," en *The Mathematics Teacher*, Vol. 76 No. 9 (Diciembre de 1983), 668-670.

Knuth, Donald E. "Algorithmic Thinking and Mathematical Thinking," en *The American Mathematical Monthly*, Vol. 92 No. 3 (Marzo de 1985), 170-181.

Maurer, Stephen B. "Two Meanings of Algorithmic Mathematics," en *The Mathematics Teacher*, Vol. 77 No. 6 (Septiembre de 1984), 430-435. (Se discute la diferencia entre crear y ejecutar algoritmos.)

Leonardo Fibonacci nació en la segunda mitad del siglo XII. El nombre ***Fibonacci*** es una contracción de ***filius Bonacci***, que significa "hijo de Bonaccio". Su padre, Guilielmo Bonacci, fue un prominente comerciante italiano que recibió el cargo de "escriba público" en lo que hoy es Argelia.

Leonardo viajó a Egipto, Siria, Grecia y Sicilia, y aprovechaba para estudiar los métodos para realizar cálculos. Cuando volvió a Italia escribió el libro titulado ***Liber Abbaci***, que significa "libro del ábaco". El título es confuso, porque el libro trata, en realidad, de la realización de cálculos sin usar el ábaco. Introdujo los numerales indoarábigos, explicó el concepto del valor posicional y dio ejemplos de cálculos aritméticos utilizando este sistema. Estudió la obra de Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi y recibió la influencia de su estilo. Casi al mismo tiempo, otros estudiosos europeos empezaban a traducir al latín la obra de al-Khowarizmi. Los libros de al-Khowarizmi y Fibonacci contribuyeron al cambio de los numerales romanos por el sistema actual en Europa. Los procedimientos aritméticos para realizar cálculos llegaron a conocerse como ***algoritmos***, del nombre al-Khowarizmi.

Uno de los problemas del ***Liber Abbaci*** da lugar a una sucesión de números que lleva el nombre de Fibonacci. Un hombre tiene una pareja de conejos confinados en un patio; el problema consiste en encontrar cuántas parejas pueden criarse de ella en un año si cada pareja empieza a procrear a partir del segundo mes de nacimiento y procrea una pareja cada mes en adelante.

Casi es todo lo que se sabe de la vida de Fibonacci. Continuó escribiendo sobre matemáticas y sus aplicaciones en el comercio. Probablemente murió alrededor de 1240.

2

Conjuntos

Así como en una oficina se usan archiveros para guardar expedientes, los programadores de computadoras usan archivos para almacenar datos. Los conceptos de registros y archivos del área de programación se relacionan con los conjuntos matemáticos. Un archivo puede concebirse como un conjunto de registros.

2.1. NOTACIÓN DE CONJUNTOS

Muchos de los conceptos matemáticos pueden exlicarse si se usa la teoría de conjuntos. Las ideas que aquí se exponen serán de utilidad en capítulos subsecuentes.

La idea de conjunto es tan básica que, en vez de definir el término, se desarrollará la idea intuitivamente considerando varios ejemplos. Un conjunto es una colección de objetos. Podría hablarse de un conjunto de personas que toman un curso de matemáticas, de un conjunto de palos de golf o de un conjunto de ollas y cacerolas. En matemáticas, los conjuntos con frecuencia consisten de números.

Los conjuntos pueden especificarse en cualquiera de las tres formas siguientes: por nombre, por enlistamiento o por descripción.

En la sección 2.4 se tratan algunos de los conjuntos que tienen nombres especiales, como el de los enteros y el de los números reales.

Cuando se usa el método de enlistamiento, los miembros del conjunto se separan por comas y se enlistan entre llaves { }. Si hay muchos miembros, puede no ser conveniente —o incluso puede no ser posible— enlistarlos todos. Tres puntos, llamados elipsis, indican que se han omitido algunos de los elementos de la lista, que, sin embargo, están incluidos. Cuando se use una elipsis, es necesario verificar que se especifica el número suficiente de miembros para establecer el patrón con toda claridad. Por ejemplo {1, 2, 3, 4, 5} especifica un conjunto de sólo cinco elementos. Pero {1, 3, 5, 7, 9, . . .} es otro con

un número infinito de miembros. La elipsis indica que los números impares posteriores al 9 están incluidos en el conjunto. El conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 90\}$ contiene los números del 1 al 90. El conjunto $\{1, 4, \ldots, 49\}$ no está especificado con claridad. Éste podría ser $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$, obtenido al elevar al cuadrado 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, respectivamente, o bien podría ser $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 49\}$, en el que cada elemento es tres unidades mayor que el anterior. No se dio el número suficiente de objetos para determinar el patrón.

En lugar de enlistar los miembros individuales de un conjunto, podría utilizarse la notación generalizada para describir los objetos de un conjunto. Este método suele usarse para conjuntos de números. Así, $\{x \mid x$ es un número par y $x > 6\}$ se lee "el conjunto de todas las x tales que x es un número par y x es mayor que 6". Las llaves indican un conjunto. El símbolo $\mid$ se lee "tal que" y el símbolo $>$ significa "es mayor que". Por la descripción se sabe que el conjunto también podría escribirse $\{8, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$.

En ocasiones, es conveniente asignar un nombre al conjunto. Para ello se usan letras mayúsculas. Podría escribirse

$A = \{8, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$ o
$B = \{x \mid x$ es múltiplo positivo de $3\}$.

El símbolo $\in$ se lee "pertenece a" o "es elemento de". Podría decirse $8 \in A$, $3 \in B$, $6 \in B$, etc. El símbolo $\notin$ se lee "no pertenece a" o "no es elemento de". Así, $9 \notin A$.

Se considerarán tres operaciones con conjuntos: la intersección, la unión y el complemento.

La *intersección* se indica por el símbolo $\cap$.

Definición

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Obsérvese que la intersección de dos conjuntos es otro conjunto.

Ejemplo 1

Si $A = \{2, 3, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, encontrar $A \cap B$.

Solución

Se buscan los elementos que están en ambos conjuntos.

$A = \{2, 3, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Por lo tanto, $A \cap B = \{2, 3,\}$.

Ejemplo 2

Si $C = \{1, 3, 5\}$ y $D = \{2, 4, 6\}$, encontrar $C \cap D$.

Solución

No hay elementos que estén en ambos conjuntos. Por lo tanto, $C \cap D = \{\ \}$.

Al conjunto $\{\ \}$ se le llama conjunto "vacío" o "nulo". Es un conjunto que no contiene objetos. En ocasiones, se usa el símbolo ϕ en lugar de $\{\ \}$.

Los elementos de un conjunto pueden ser otros conjuntos a su vez. Así, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ es un conjunto que contiene dos. Cada uno de los conjuntos $\{\{1\}\}$ y $\{\phi\}$ contiene un conjunto. No confundir el conjunto vacio ϕ con el conjunto $\{\phi\}$ que contiene un objeto.

La segunda operación con conjuntos es la *unión*. El símbolo de la unión es $\cup$.

Definición

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Una manera de encontrar la unión de dos conjuntos es poner todos los elementos de los conjuntos en uno solo. En lugar de enlistar todos los elementos de A seguidos por todos los de B, por lo general se enlistan en su "orden natural" (en caso de haberlo), y cada elemento se enlista solo una vez.

Ejemplo 3

Si $A = \{2, 3, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, encontrar $A \cup B$.

Solución

Al poner los elementos de A y B en un conjunto, se tiene $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ejemplo 4

Si $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $D = \{2, 4, 6\}$, encontrar $C \cup D$.

Solución

Al poner los elementos de C y D en un conjunto, se tiene $C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Para que un objeto esté en $A \cap B$, debe pertenecer tanto a A como a B. Para que un objeto esté en $A \cup B$, sólo debe pertenecer a uno de los dos conjuntos, o a ambos. La conjunción "o" de la definición

de unión se usa en el sentido de "inclusivo". Es decir, $x \in A$ o $x \in B$ significa que x pertenece a A o bien a B, o a ambos.

La tercera operación con conjuntos es el *complemento*. Antes de definir el complemento de un conjunto, es necesario introducir el *conjunto universo* (U). Éste es el conjunto mayor que hay que considerar en un problema dado. Si $C = \{ x \mid x < 6 \}$, se requiere conocer el conjunto mayor del que puede elegirse x. Si el conjunto universo es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces $C = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$. Pero si es $\{-2, 0, 2, 4, 6\}$, entonces $C = \{ -2, 0, 2, 4 \}$. El complemento del conjunto A se denota por A'.

Definición

$$A' = \{ x \mid x \in U, x \text{ no está en } A \}.$$

Ejemplo 5

Si $U = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ y $A = \{1, 5, 9\}$, encontrar A'.

Solución

$U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Puesto que 1, 5 y 9 pertenecen a A, puede verse cuáles de los elementos de U no pertenecen a A. Por lo tanto, $A' = \{3, 7\}$.

Ejemplo 6

Si $U = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ y $B = \{ 1, 3, 5\}$, encontrar B'.

Solución

$U = \{ 1, 3, 5, 7, 9\}$. Se observa que 7 y 9 no pertenecen a B. Por lo tanto, $B' = \{ 7, 9\}$.

Cuando en una expresión aparecen paréntesis, ésta se realiza primero.

Ejemplo 7

Si $A = \{ 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, y $C = \{ 1, 3, 5\}$, encontrar $(A \cap B) \cup C$.

Solución

Puesto que $A \cap B$ está entre paréntesis, se considera primero.

$A \cap B = \{ 2, 3 \}$; de modo que $(A \cap B) \cup C = \{ 2, 3 \} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$.

Ejemplo 8

Si $A = \{ 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, y $C = \{ 1, 3, 5\}$, encontrar $A \cap (B \cup C)$.

Solución

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \text{ de modo que}$$
$$A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 5\}.$$

Las palabras *y*, *o* y *no* usadas en las tres definiciones anteriores son de suma importancia. Serán útiles para el lector cuando exprese problemas en lenguaje común en términos matemáticos si asocia la palabra "y" con intersección, "o" con unión y "no" con complemento.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$
$$A' = \{x \mid x \in U, \text{ no está en } A\}$$

En los ejemplos 9 al 14 se usan los conjuntos siguientes;

U = Al conjunto de estudiantes de una escuela.
M = Al conjunto de estudiantes que cursan matemáticas.
E = Al conjunto de estudiantes que cursan inglés.
A = Al conjunto de estudiantes con promedio A.

Ejemplo 9

Usar la notación de conjuntos para especificar cada conjunto.

(a) El conjunto de los estudiantes de la escuela que cursan matemáticas e inglés.
(b) El conjunto de estudiantes de la escuela que cursan matemáticas o inglés.

Solución

(a) $M \cap E$
(b) $M \cup E$

Ejemplo 10

Usar la notación de conjuntos para especificar cada conjunto.

(a) El conjunto de estudiantes de la escuela que no cursan matemáticas.
(b) El conjunto de estudiantes de la escuela que tienen promedio A y no cursan matemáticas.

Solución

(a) M'
(b) $A \cap M'$

Los paréntesis se usan a modo de puntuación en las expresiones matemáticas, como las comas en los enunciados en español. Las comas indican las frases que integran un enunciado. Los paréntesis, los conjuntos agrupados en una expresión matemática.

Ejemplo 11

Usar la notación de conjuntos para especificar cada conjunto.

(a) El conjunto de estudiantes que cursan matemáticas o inglés, pero que no tienen promedio A. ("Pero" equivale a "y" en este enunciado.)
(b) El conjunto de estudiantes que cursan matemáticas, o que cursan inglés pero no tienen promedio A.

Solución

(a) $(M \cup E) \cap A'$
(b) $M \cup (E \cap A')$

Ejercicios

Usar los conjuntos siguientes en los problemas 1 al 6.

$U = \{1, 2, 3, \ldots 10\}$
$A = \{2, 3, 5, 7\}$
$B = \{3, 6, 9\}$

Encontrar cada conjunto. Ver los ejemplos 1 al 6.

1. (a) $A \cap B$	2. (a) A'	3. (a) $(A \cup B)'$
(b) $A \cup B$	(b) B'	(b) $A' \cap B'$
4. (a) $(A \cap B)'$	5. (a) $A' \cap B$	6. (a) $A' \cup B$
(b) $A' \cup B'$	(b) $A \cap B'$	(b) $A \cup B'$

Usar los conjuntos siguientes en los problemas 7 al 12.

$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$P = \{1, 3\}$
$Q = \{5, 7\}$
$R = \{9, 11\}$

Encontrar cada conjunto. Ver los ejemplos 1 al 6.

7. (a) $P \cap Q$	8. (a) $P \cup R$	9. (a) $P' \cap Q$
(b) $Q \cup R$	(b) $P \cap R$	(b) $Q' \cup R$
10. (a) $P \cap R'$	11. (a) $P' \cup Q'$	12. (a) $Q' \cup R'$
(b) $(P \cap Q)'$	(b) $(Q \cup R)'$	(b) $Q' \cap R'$

Usar los conjuntos siguientes en los problemas 13 al 25.

$U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$X = \{2, 4, 6\}$
$Y = \{4, 8\}$
$Z = \{4, 10\}$

Encontrar cada conjunto. Ver los ejemplos 7 y 8.

13. $(X \cap Y) \cap Z$ **14.** $X \cap (Y \cap Z)$ **15.** $X \cap (Y \cup Z)$
16. $(X \cap Y) \cup Z$ **17.** $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ **18.** $(X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$
19. $X \cup (Y \cap Z)$ **20.** $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ **21.** $X \cap (Y \cup Z)$
22. $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ **23.** $X' \cap (Y \cup Z)$ **24.** $X \cap (Y \cup Z)'$
25. $X' \cup (Y \cap Z)$

Usar los conjuntos siguientes en los problemas 26 al 39.

U = Al conjunto de personas aseguradas por determinada compañía.
W = Al conjunto de mujeres aseguradas por la compañía.
S = Al conjunto de fumadores asegurados por la compañía
O = Al conjunto de personas excedidas de peso aseguradas por la compañía.

Escribir una descripción de cada conjunto utilizando los símbolos $\cap$, $\cup$ y $'$. Ver los ejemplos 9 al 11.

26. El conjunto de mujeres que fuman.
27. El conjunto de hombres que fuman.
28. El conjunto de personas que fuman o excedidas de peso.
29. El conjunto de personas que no fuman.
30. El conjunto de mujeres que no fuman.
31. El conjunto de hombres que no fuman.
32. El conjunto de hombres no excedidos de peso.
33. El conjunto de mujeres no excedidas de peso.
34. El conjunto de personas que no fuman o no excedidas de peso.
35. El conjunto de personas que no fuman y excedidas de peso.
36. El conjunto de personas que no fuman y no excedidas de peso.
37. El conjunto de mujeres que fuman o excedidas de peso.
38. El conjunto de mujeres que fuman o excedidas de peso.
39. El conjunto de hombres que fuman o excedidos de peso.

Usar los conjuntos que se presentan a continuación en los problemas 40 al 48.

U = Al conjunto de estudiantes de una clase escolar.
F = Al conjunto de personas de 40 años o más.
T = Al conjunto de personas de 20 años o menos.
M = Al conjunto de personas nacidas al este del río Misisipi.
R = Al conjunto de personas nacidas al oeste de las montañas Rocosas.

Escribir una descripción de cada conjunto utilizando los símbolos $\cap$, $\cup$ y $'$. Ver los ejemplos 9 al 11.

40. El conjunto de personas de 40 años o más que nacieron al este del Misisipi.
41. El conjunto de personas de 40 años o más que no nacieron al este del Misisipi.
42. El conjunto de personas de 20 años o menos que no nacieron al oeste de las Rocosas.
43. El conjunto de personas de 20 años o menos que nacieron al oeste de las Rocosas.
44. El conjunto de personas nacidas al este de las Rocosas.
45. El conjunto de personas nacidas al oeste del Misisipi.
46. El conjunto de personas que tienen 20 años o menos o que tienen 40 años o más.
47. El conjunto de personas de más de 20 años, pero con menos de 40.
48. El conjunto de personas que nacieron entre el río Misisipi y las montañas Rocosas.

*49. ¿En qué caso se cumple la identidad $A \cap B \equiv A \cup B$?

*50. Encontrar los cuatro elementos siguientes de 2, 3, 5, 7, 11, . . . El programa "generador de Eratóstenes", que genera este conjunto de números, suele usarse como *prueba comparativa*. Una prueba comparativa es un programa que se usa para probar y comparar computadoras.

*51. Encontrar los cuatro elementos siguientes de 1, 2, 3, 5, 8, . . . Este conjunto de números se denomina la "serie de Fibonacci". En ocasiones se usa como prueba comparativa un programa que genera este conjunto de números.

⇒52. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo para expresar un algoritmo para calcular los 20 primeros números de la serie de Fibonacci.

*53. Al número de elementos de un conjunto A se le llama *número cardinal* del conjunto y se denota por $n(A)$.

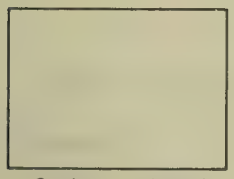
(a) ¿Cuándo $n(A \cup B)$ es igual a $n(A) + n(B)$?
(b) Determinar una fórmula general para $n(A \cup B)$.

2. 2. DIAGRAMAS DE VENN

Con frecuencia, es conveniente dibujar un diagrama para visualizar la relación entre dos conjuntos. A las representaciones gráficas de conjuntos se les llama *diagramas de Venn*, en honor de John Venn, matemático suizo del siglo XIX. Por lo general, el conjunto universal se indica con un rectángulo (ver figura 2.1). Los conjuntos que están dentro del conjunto universal suelen representarse como regiones circulares (ver figura 2.2).

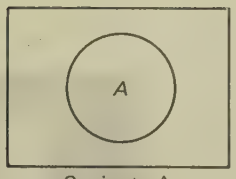
Las operaciones básicas con conjuntos se ilustran en las figuras 2.3, 2.4 y 2.5.

No obstante que $A \cap B = \phi$, el diagrama presentado en la figura 2.3 es adecuado. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, entonces $A \cap B = \phi$. Pero el diagrama podría dibujarse como en la figura 2.6.



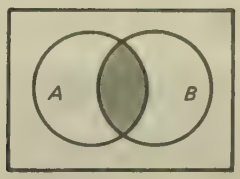
Conjunto universal

Figura 2.1



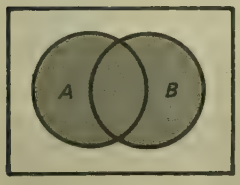
Conjunto A

Figura 2.2



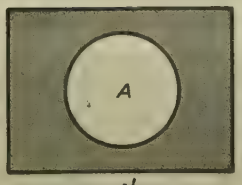
$A \cap B$

Figura 2.3



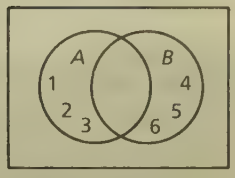
$A \cup B$

Figura 2.4



A'

Figura 2.5



$A \cap B = \emptyset$

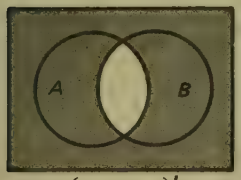
Figura 2.6

En ocasiones, se necesita dibujar un diagrama de Venn para una expresión que contiene más de una operación con conjuntos. Por ejemplo, para representar $(A \cap B)'$, primero se visualiza $A \cap B$. Puesto que $(A \cap B)'$ es la parte de U que *no* está en $A \cap B$, se sombrea todo el universo, con excepción de $A \cap B$. Ver figura 2.7.

En algunos problemas se podrá visualizar cada conjunto por separado antes de considerar la intersección o la unión. Considérese $A' \cup B'$. Se sombrea A' con líneas horizontales y B' con líneas verticales. Ver las figuras 2.8 y 2.9.

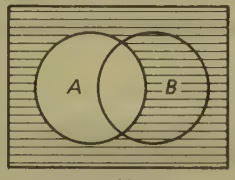
Cuando estos dos conjuntos se sombrean en el mismo diagrama, es fácil ver su unión. Ver figura 2. 10.

A' está sombreado horizontalmente y B', verticalmente. Puesto que $A' \cup B' = \{ x \mid x \in A' \text{ o } x \in B' \}$, $A' \cup B'$ incluye todos los elementos que estén dentro del área sombreada horizontal o verticalmente. Se sombrea en gris el área del diagrama en el que las líneas corren horizontal, verticalmente o en ambos sentidos. Ver figura 2.11. El procedimiento se expresa enseguida como un algoritmo.



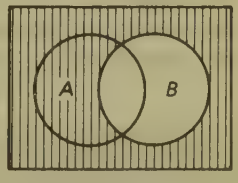
$(A \cap B)'$

Figura 2.7



A'

Figura 2.8



B'

Figura 2.9

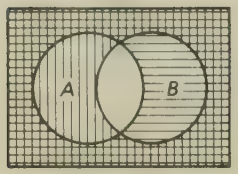
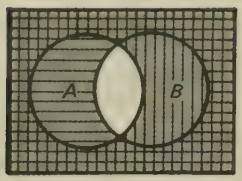


Figura 2.10



$A' \cup B'$

Figura 2.11

Para ilustrar la intersección o unión de conjuntos en un diagrama de Venn:

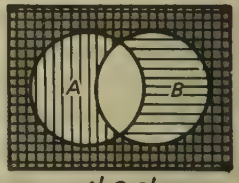
1. Se sombrea el primer conjunto con líneas horizontales.
2. Se sombrea el segundo conjunto con líneas verticales.
3. (a) La intersección de los dos conjuntos tiene líneas horizontales y verticales.
   (b) La unión de los dos conjuntos tiene líneas horizontales o verticales (o en ambos sentidos).

Ilustrar $A' \cap B'$ en un diagrama de Venn.

Ejemplo 1

Solución

A' se sombrea horizontalmente y B', verticalmente. Puesto que $A' \cap B' = \{x \mid x \in A' \text{ y } x \in B'\}$, $A' \cap B'$ incluye toda el área que está sombreada horizontal y verticalmente. El área del diagrama con líneas horizontales como verticales se sombrea en gris para indicar la respuesta final. Ver figura 2.12.



$A' \cap B'$

Figura 2.12

Se dice que dos conjuntos son *iguales* cuando contienen los mismos elementos. En los ejercicios 4(a) y (b) de la sección 2.1 se vio que $(A \cap B)' = A' \cup B'$ para $A = \{2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$. Es imposible verificar esta relación en todos los pares de conjuntos A y B mediante el enlistamiento de sus miembros. Por lo tanto, se verifica utilizando un diagrama de Venn en conjuntos arbitrarios A y B. Se representa $(A \cap B)'$ en un diagrama de Venn y $A' \cup B'$ en otro. Ver las figuras 2.7 y 2.11. Puesto que los dos diagramas son idénticos, independientemente de los elementos que estén en A y B, se sabe que los conjuntos son iguales.

Para demostrar que dos conjuntos son iguales:

1. Se ilustra cada conjunto en un diagrama de Venn diferente.
2. Se comparan los dos diagramas. Si son idénticos, los dos conjuntos son iguales.

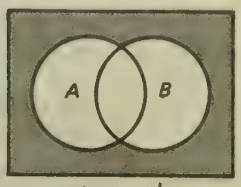
Demostrar que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Ejemplo 2

Solución

$(A \cup B)'$ es la parte de U que *no* está en $(A \cup B)$. Ver figura 2.13. $A' \cap B'$ se ilustró en la figura 2.12. Puesto que los diagramas son idénticos, los dos conjuntos son iguales.

Las proposiciones que acaban de examinarse se conocen como las *leyes de De Morgan*, en honor de Augustus De Morgan, matemático inglés del siglo XIX.



$(A \cup B)'$

Figura 2.13

Leyes de De Morgan

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Ejercicios

Trazar un diagrama de Venn para ilustrar cada conjunto. Ver el ejemplo 1.

1. $A \cap B$	**2.** $A \cup B$	**3.** A'
4. $(A')'$	**5.** $A \cap B'$	**6.** $A' \cap B$
7. $A \cup B'$	**8.** $A' \cup B$	**9.** $A \cap A$
10. $A \cup A$	**11.** $A \cup A'$	**12.** $A \cap A'$
13. $A \cap U$	**14.** $A \cup U$	**15.** $A \cup \phi$
16. $A \cap \phi$	**17.** $A' \cap B'$	**18.** $A' \cup B'$

Demostrar que las proposiciones siguientes son verdaderas. Ver el ejemplo 2.

19. $(A')' = A$
20. $(A \cap B) \cup A = A$
21. $(A \cap B) \cap A = A \cap B$
22. $(A \cup B) \cup A = A \cup B$
23. $(A \cup B) \cap A = A$
24. $A \cup A' = U$
25. $A \cap A' = \phi$
26. $(A' \cap B)' = A \cup B'$ (Sugerencia: Ver el problema 6 anterior para $A' \cap B$)
27. $(A \cup B')' = A' \cap B$ (Sugerencia: Ver el problema 7 anterior para $A \cup B'$)
28. $(A' \cup B)' = A \cap B'$
29. $(A \cap B')' = A' \cup B$
30. $(A' \cap B')' = A \cup B$
***31.** ¿Cuándo $(A \cup B)'$ es igual a $A' \cup B'$?

*32. ¿Cuándo $(A \cap B)'$ es igual a $A' \cap B'$?

*33. A es un subconjunto de B, lo cual se denota $A \subseteq B$, si todo elemento de A es elemento de B. Además, $\phi \subseteq A$ para todo conjunto A. Si $A = \{a, b\}$, sus subconjuntos son ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{a, b\}$.

(a) Enlistar los subconjuntos de $\{a, b, c\}$.
(b) Determinar una fórmula general para el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos.
(c) Explicar por qué al agregarse un elemento a un conjunto el número de subconjuntos se duplica.

2.3. DIAGRAMAS DE VENN CON TRES CONJUNTOS

Cuando se ilustran tres conjuntos en un diagrama de Venn, éstos se dibujan según se muestra en las figuras 2.14 y 2.15. Este tipo de diagramas es adecuado para representar cualquier relación en la que intervienen tres conjuntos.

Es común que una expresión que relacione tres conjuntos incluya paréntesis. Por lo general, una expresión entre paréntesis se refiere a una intersección, una unión o un complemento. Las figuras 2.16, 2.17 y 2.18 se presentan como revisión de estas operaciones.

Es posible aplicar la técnica del sombreado horizontal y vertical cuando se considera la parte de la expresión que está entre paréntesis como un conjunto aparte.

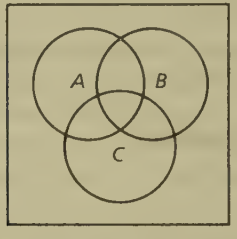


Figura 2.14

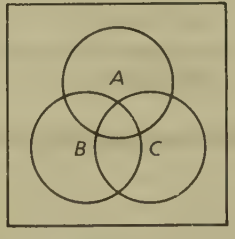
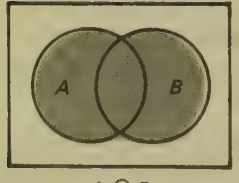
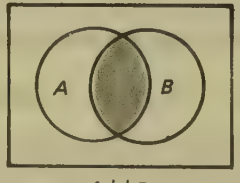


Figura 2.15



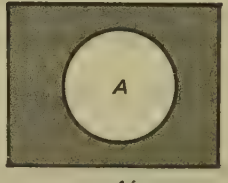
$A \cap B$

Figura 2.16



$A \cup B$

Figura 2.17



A'

Figura 2.18

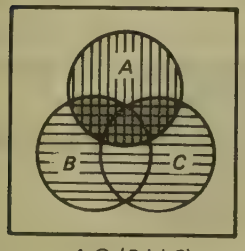
Para ilustrar una expresión que incluye tres conjuntos:

1. Se considera la parte de la expresión que está entre paréntesis como un conjunto aparte. Se sombrea con líneas horizontales.
2. La otra parte de la expresión se considera como un solo conjunto. Se sombrea con líneas verticales.
3. (a) La intersección de dos conjuntos tiene líneas horizontales y verticales.
   (b) La unión de dos conjuntos tiene líneas horizontales o verticales (o en ambos sentidos).

Ilustrar $A \cap (B \cup C)$ utilizando un diagrama de Venn. **Ejemplo 1**

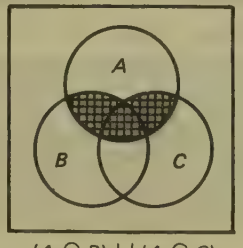
Solución

Se sombrea $(B \cup C)$ con líneas horizontales y A con líneas verticales. $A \cap (B \cup C)$ tiene líneas verticales y horizontales, por lo que esa parte del diagrama se sombrea en gris. Ver figura 2.19.



$A \cap (B \cup C)$

Figura 2.19



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Figura 2.20

Ilustrar $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ en un diagrama de Venn. **Ejemplo 2**

Solución

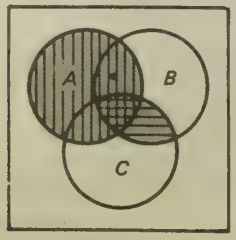
Se sombrea $(A \cap B)$ con líneas horizontales y $(A \cap C)$ con líneas verticales. Debido a que $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ tiene líneas horizontales o verticales, esa área se sombrea en gris. Ver figura 2.20.

Debido a que las partes sombreadas de las figuras 2.19 y 2.20 son idénticas, se sabe que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Demostrar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. **Ejemplo 3**

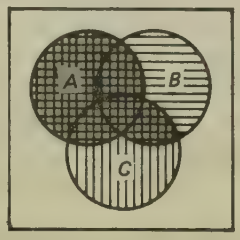
Solución

Ilustrar los dos conjuntos en diagramas de Venn diferentes y compararlos. Ver las figuras 2.21 y 2.22.



$A \cup (B \cap C)$

Figura 2.21



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Figura 2.22

Las dos proposiciones que acaban de examinarse se conocen como propiedades distributivas porque son similares a la propiedad distributiva del álgebra: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. Se escribe $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y se dice que la intersección se distribuye en la unión. Se escribe $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y se dice que la unión se distribuye en la intersección.

Propiedades distributivas

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

El estudiante recordará también las propiedades conmutativa y asociativa de la adición y la multiplicación. Las operaciones con conjuntos de intersección y unión también tienen estas propiedades. La conmutativa establece que puede cambiarse el orden de los operandos, mientras que la asociativa establece que puede cambiarse la forma de agruparlos (o asociarlos) siempre que se trate de la misma operación en la expresión completa.

Propiedades conmutativas

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup B = B \cup A$

Propiedades asociativas

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejemplo 4

Determinar cuáles son las propiedades que se aplican en cada proposición.

(a) $(A \cap B) \cap C = (B \cap A) \cap C$
(b) $(A \cup B) \cup C = C \cup (A \cup B)$
(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Solución

(a) $(A \cap B) \cap C = (B \cap A) \cap C$. Se aplicó la propiedad conmutativa para cambiar el orden de A y B.
(b) $(A \cup B) \cup C = C \cup (A \cup B)$. Se aplicó la propiedad conmutativa para cambiar el orden de $(A \cup B)$ y C.
(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Se aplicó la propiedad distributiva para distribuir la unión en la intersección.

Ejemplo 5

Determinar cuáles son las propiedades que se aplican en cada enunciado.

(a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B$

Solución

(a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Se aplicó la propiedad asociativa para cambiar la agrupación de B con A en el primer miembro a B con C en el segundo.
(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Se aplicó la propiedad distributiva para distribuir la intersección en la unión.
(c) $A \cup (B \cup C) = A \cup (C \cup B) = (A \cup C) \cup B$. En este ejemplo se aplicaron las propiedades conmutativa y asociativa. La conmutativa permitió cambiar el orden. La asociativa permitió cambiar el agrupamiento de C con B a C con A.

Ejercicios

Trazar un diagrama de Venn para ilustrar cada conjunto. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. $A' \cap (B \cup C)$
2. $A \cap (B \cap C)'$
3. $A \cup (B \cap C)'$
4. $A' \cup (B \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C')$
6. $A \cap (B \cap C')$
7. $(A \cup B) \cap C'$
8. $(A \cup B) \cup C'$
9. $(A \cap B) \cup C'$
10. $(A \cap B) \cap C'$
11. $A' \cap (B \cup C)'$
12. $A' \cup (B \cap C)'$
13. $A' \cap (B \cap C)'$
14. $A' \cup (B \cup C)'$
15. $(A \cap B') \cap C'$
16. $(A' \cap B) \cup C'$

Trazar diagramas de Venn para demostrar que las proposiciones siguientes son verdaderas. Ver el ejemplo 3.

17. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
18. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
19. $A \cap (B \cup C)' = (A \cap B') \cap C'$
20. $A \cap (B \cap C)' = (A \cap B') \cup (A \cap C')$

Determinar cuáles son las propiedades que se aplican en las proposiciones siguientes. Ver los ejemplos 4 y 5.

21. $B \cup (C \cap D) = (B \cup C) \cap (B \cup D)$
22. $(B \cap C) \cap D = D \cap (B \cap C)$
23. $(B \cup C) \cup D = (C \cup B) \cup D$
24. $B \cap (C \cap D) = (B \cap D) \cap C$
25. $(B \cup C) \cup D = B \cup (C \cup D)$
26. $Q \cap (R \cup P) = (Q \cap R) \cup (Q \cap P)$
27. $(Q \cup R) \cup P = P \cup (Q \cup R)$
28. $Q \cup (R \cup P) = (Q \cup P) \cup R$
29. $(Q \cup R) \cup P = Q \cup (R \cup P)$
30. $(Q \cup R) \cup P = (R \cup Q) \cup P$

*31. Un profesor pregunta a los 35 alumnos de su clase quiénes saben BASIC. Veinte alumnos levantan la mano. Cuando pregunta quiénes saben FORTRAN, 10 levantan la mano. Cuando pregunta quiénes saben Pascal, 15 levantan la mano. Nueve saben BASIC y FORTRAN; cuatro, FORTRAN y Pascal, y ocho, BASIC y Pascal. Sólo tres alumnos saben los tres lenguajes. Determinar cuántos de los alumnos sólo conocen uno de los lenguajes y cuántos no conocen ninguno de ellos.

*32. Un diagrama de Venn en el que se ilustran dos conjuntos tiene cuatro regiones que no se traslapan. Un diagrama de Venn en el que se ilustran tres conjuntos tiene ocho regiones que no se traslapan. Explicar por qué cuando se presenta un conjunto adicional, se duplica el número de regiones que no se traslapan.

*33. Construir un diagrama de Venn para ilustrar cuatro conjuntos. (Sugerencia: Es imposible hacerlo con cuatro círculos.)

2.4. CONJUNTOS DE NÚMEROS

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ es el conjunto de los *números naturales*. Cuando se incluye el número 0, al conjunto se le llama de los *números completos*.

Cuando el estudiante inició su conocimiento en el estudio de los números, aprendió ciertas "cualidades numéricas" de este conjunto. Quizás haya presentado estas cualidades en forma de tablas de sumar y multiplicar como las que se presentan en las tablas 2.1 y 2.2. Para encontrar la suma de dos números, el primero se localiza en la columna de la extrema izquierda de la tabla de sumar. Se traza una línea imaginaria a lo largo de ese renglón. Se localiza el segundo número en el renglón superior de la tabla. Se traza una línea imaginaria hacia abajo en esa columna. Las dos líneas imaginarias se cortan en el número que corresponde a la suma. La tabla de multiplicación se usa de la misma manera para encontrar el producto de dos números

Tabla 2.1 Tabla de sumar

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla 2.2 Tabla de multiplicación

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

$I = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ es el conjunto de los *números enteros*.

El conjunto de los enteros puede considerarse como una ampliación del conjunto de los números naturales. En lugar de descartar éstos y sus "cualidades numéricas", se siguen aplicando las reglas anteriores y se establecen otras nuevas para los números negativos. (En este punto, el estudiante podría revisar las reglas para los números con signo que se presentan en el apéndice.)

$Q = \{ x \mid x = a/b$, **donde** $a, b \in I, b \neq 0 \}$ es el conjunto de los *números racionales*. (Se usa la letra Q del vocablo inglés *quotient*, cociente.)

Es decir, un número racional es cualquier número que puede escribirse como el cociente indicado de dos enteros, siempre y cuando el denominador sea diferente de cero. Por tanto, 4/5, $-$ 9/7 y 7/8 son números racionales. El 2 es racional porque puede expresarse como 2/1, 4/2, etcétera. Puesto que $\sqrt{4}$ puede expresarse como 2, también es racional. Los números racionales son una ampliación de los enteros. Las reglas anteriores siguen siendo válidas, pero es necesario formular algunas reglas nuevas para manejar denominadores, con el propósito de resolver problemas con fracciones.

Cualquier número que puede expresarse como una fracción también puede expresarse en forma decimal al efectuar el cociente indicado. Una característica importante de estos decimales es que pueden considerarse como fracciones decimales periódicas. Es decir, un número finito de dígitos forman un patrón que se repite de manera indefinida. Por ejemplo, 1/3 = 0.333..., donde el "3" se repite; 1/2 = 0.5000..., donde el "0" se repite; y 3/11 = 0.272727..., donde el "27" se repite. Podría decirse que $Q = \{ x \mid x$ **puede expresarse como una fracción decimal periódica** $\}$.

Al número que no puede expresarse como una fracción decimal periódica se le llama *irracional*. Por ejemplo, 0.1010010001 ... (donde el número de ceros aumenta entre cada par de unos sucesivos), carece de un patrón que se repita. No es sencillo ver que números como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son irracionales, pero los matemáticos han demostrado que lo son. De hecho, $\sqrt{a}$, donde a es un entero positivo, será un entero o bien un número irracional. Johann Heinrich Lambert demostró en 1761 que el número π es irracional.

$R = \{ x \mid x$ **es un número racional o** x **es un número irracional** $\}$ es el conjunto de los *números reales*.

Podría decirse que R está formado por la unión de los números racionales y los irracionales.

Es posible representar los conjuntos de números en un diagrama de Venn, En tal caso, es evidente que cada uno de los conjuntos es una ampliación del anterior. En la figura 2.23 se muestra la representación de los conjuntos de números.

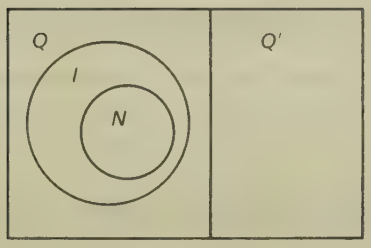


Figura 2.23

Conjuntos de números

Números naturales: $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
Números enteros: $I = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Números racionales: $Q = \{x | x = a/b$ donde $a, b \in I, b \neq 0\}$ o $Q = \{x | x$ puede expresarse como una fracción decimal periódica$\}$.
Números reales: $R =$ números racionales $\cup$ números irracionales.

Ejemplo 1

Para cada número de la tabla, marcar los conjuntos a los que pertenece.

Solución

Número	*Núm. natural*	*Enteros*	*Núm. racional*	*Núm. real*
2	x	x	x	x
-3		x	x	x
1/3			x	x
$\sqrt{3}$				x

Se acostumbra clasificar los números de acuerdo con el primer conjunto al que pertenecen. Así, se diría $2 \in N$, $-3 \in I$, $1/3 \in Q$ y $\sqrt{3} \in R$.

Ejemplo 2

Enlistar los elementos de: $\{x | x \in N, x \geq 6\}$.

Solución

$\{6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$.

Enlistar los elementos de: $\{ x | x \in I, x$ es múltiplo de $4\}$. **Ejemplo 3**

Solución

$\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$.

Puesto que N, I, Q y R representan conjuntos de números, es posible realizar operaciones con éstos.

Encontrar $Q \cap N$. **Ejemplo 4**

Solución

Puesto que todo elemento de N también es elemento de Q, $Q \cap N = N$.

Encontrar $I \cup N$. **Ejemplo 5**

Solución

Puesto que todo elemento de N también es elemento de I, $I \cup N = I$.

Algunos lenguajes de computación permiten el uso de los conceptos de conjuntos. Una de las aplicaciones de éstos tiene como propósito hacer que un programa sea accesible para el usuario. La instrucción de meter un entero entre 1 y 10 podría darse en un bucle DO WHILE. El algoritmo se muestra en pseudocódigo.

```
Presentar mensaje: "Meter un entero entre 1 y 10".
Obtener el número del teclado.
Mientras el número no pertenezca al conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
8, 9, 10}.
Presentar mensaje: "Inténtelo de nuevo–Meter un entero entre
1 y 10".
Obtener el número del teclado.
FIN MIENTRAS.
```

El programa no "abortará" aunque se metan datos incorrectos, tales como 2.5 o 400.

Ejercicios

Para cada número de la tabla marcar los conjuntos a los que pertenece. Ver el ejemplo 1.

	Número	*Núm. natural*	*Enteros*	*Núm. racional*	*Núm. real*
1.	0				
2.	2				
3.	-3				
4.	2/3				
5.	$\sqrt{5}$				
6.	$\sqrt{9}$				
7.	1 4/5				
8.	3.14				
9.	5				
10.	$-1/2$				
11.	-12				
12.	$\sqrt{7}$				
13.	π				
14.	5.1				
15.	7/5				

Enlistar los elementos de cada conjunto. Ver los ejemplos 2 y 3.

16. $\{x \mid x \in N, x < 5\}$.
17. $\{x \mid x \in I, x < 5\}$.
18. $\{x \mid x \in N, x$ es múltiplo de $3\}$.
19. $\{x \mid x \in I, x$ es múltiplo de $3\}$.
20. $\{x \mid x \in I, x$ es divisible entre $5\}$.
21. $\{x \mid x \in N, x$ es divisible entre $5\}$.
22. $\{x \mid x$ es un entero par$\}$.
23. $\{x \mid x$ es un entero impar$\}$.
24. $\{x \mid x$ es un número natural impar$\}$.
25. $\{x \mid x$ es un entero no negativo$\}$.
26. $\{x \mid x$ es un número racional con numerador $2\}$.
27. $\{x \mid x$ es un número racional con numerador $3\}$.
28. $\{x \mid x$ es un número racional con denominador $5\}$.
29. $\{x \mid x$ es un número racional con denominador $7\}$.

Encontrar cada conjunto. Ver los ejemplos 4 y 5.

30. $N \cup I$ **31.** $N \cap I$ **32.** $Q \cup I$ **33.** $Q \cap I$
34. $N \cup Q$ **35.** $N \cap Q$ **36.** $R \cap Q$ **37.** $R \cup Q$
38. $N \cap R$ **39.** $N \cup R$ **40.** $I \cap R$ **41.** $I \cup R$
42. $Q' \cap Q$

⇒**43.** En 1675, Gottfried Wilhelm von Leibniz demostró que $\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 - 4/11 + \ldots$ Se necesitan 152 términos de esta serie para producir un valor de π correcto hasta la centésima más próxima (3.14). Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo para un algoritmo que determine la suma de 152 términos de esta serie.

*44. Explicar por qué cualquier fracción común puede expresarse como una fracción decimal periódica.

*45. El desarrollo siguiente indica que 0.363636... (donde 36 se repite) es igual a la fracción común 4/11.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 0.363636\ldots \\ \text{Entonces } 100x &= 36.363636\ldots \\ \text{Si se efectúa la resta, se tiene } -x &= -0.363636\ldots \\ \hline \text{Por tanto } 99x &= 36 \text{ y } x = 36/99 \text{ o } 4/11. \end{aligned}$$

(a) ¿Qué fracción común es igual a 0.9999999...?
(b) ¿Qué fracción común es igual a 4.31275275275...?

*46. Los dígitos que se repiten en una fracción decimal periódica pueden indicarse trazando una barra sobre ellos. Por ejemplo, $113/900 = 0.12\overline{5}$, $113/990 = 0.11\overline{14}$ y $113/999 = 0.\overline{113}$. Es posible convertir una fracción decimal periódica en una fracción común, considerando que el número de nueves del denominador es igual al número de dígitos situados bajo la barra, y que el número de ceros es igual al de dígitos que no están bajo la barra después del punto decimal. ¿Cómo pueden usarse los dígitos que están bajo la barra y los que no lo están para determinar el numerador?

*47. Es posible trazar un segmento que mida exactamente $\sqrt{2}$ unidades de longitud utilizando el teorema de Pitágoras. El teorema establece que en un triángulo rectángulo que tiene lados de longitudes a, b y c, con el lado de longitud c opuesto al ángulo recto, $c^2 = a^2 + b^2$. Si se traza un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan una longitud de una unidad cada uno, entonces la hipotenusa tendrá una longitud de $\sqrt{2}$ unidades. Explicar cómo se trazaría un segmento de exactamente $\sqrt{3}$ unidades de longitud.

2. 5. NOTACIÓN CIENTÍFICA Y DÍGITOS SIGNIFICATIVOS

Si se dividiera el largo de un campo de futbol americano (100 yardas o 91.44 metros) en tres segmentos diferentes y se pidiera a tres personas que cada una midiera uno de los segmentos, podrían obtenerse los siguientes resultados: primera longitud = 30 metros, segunda longitud = 28.3 metros y tercera longitud = 32.69 metros. Pero decir que el largo del campo es de 90.99 metros sería engañoso. Ello implica un grado de precisión que no se obtuvo en este problema. Realizar mediciones incluye aproximaciones. La primera persona midió hasta el metro más próximo. La segunda, hasta el decímetro más próximo, en tanto que la tercera lo hizo hasta el centímetro más próximo. Si las mediciones exactas fueran 30.41, 28.34 y 32.69 metros, la

suma exacta habría sido 91.44 metros. La suma original de 90.99 es menor en casi metro y medio.

Este ejemplo ilustra un concepto importante: *El resultado de un cálculo en el que intervienen números aproximados no es más preciso que el dato de mayor precisión usado en el cálculo.* En este caso, podría decirse que el largo del campo es de 91 metros hasta el metro más próximo.

Debido a que las computadoras suelen presentar seis u ocho cifras decimales, el resultado de un cálculo puede aparecer con una precisión mayor de la que tiene realmente. Como regla general, cuando se suman números aproximados, la suma debe redondearse al mismo número de cifras decimales que la del sumando con menos cifras decimales.

Para sumar números aproximados:

1. Alinear los puntos decimales y realizar la suma.
2. Redondear la suma al número de cifras decimales que tenga el sumando con menos cifras decimales.

Ejemplo 1

Sumar los números aproximados siguientes y redondear correctamente el resultado.

(a) 43.6 + 4.36 + 0.436
(b) 1.42 + 72.3 + 0.51
(c) 632 + 85.4 + 2.31

Solución

(a) 43.6 + 4.36 + 0.436 = 48.396, el cual se redondea a una cifra decimal (43.6 tiene una sola cifra decimal) para obtener 48.4.
(b) 1.42 + 72.3 + 0.51 = 74.23, el cual se redondea a una cifra decimal (72.3 tiene una sola cifra decimal) para obtener 74.2.
(c) 632 + 85.4 + 2.31 = 719.71, el cual se redondea al número completo más próximo (632 es un número completo) para obtener 720.

En la multiplicación se usa el concepto de dígitos significativos. Los dígitos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 que se usan en varias combinaciones para escribir números.

Definición

Un dígito es *significativo* si
(a) es un dígito *diferente de cero*,
(b) es un cero *entre* dígitos significativos, o
(c) es un cero *final después* de un punto decimal. (Un cero es final si no hay dígitos diferentes de cero que lo sigan.)

Sería conveniente ver qué es lo que no incluye esta definición; es decir, cuáles dígitos son *no* significativos. Un cero es *no significativo* si es *inicial* (por ejemplo, si no hay dígitos diferentes de cero que lo precedan) o si es un cero *final antes* del punto decimal (a menos que se especifique lo contrario).

Supóngase que los recibos por consumo de luz de dos personas son de $ 198.39 y $ 200.00. El primero podría decir; "¡Mi recibo de la luz fue de $ 200!" Los dos ceros de 200 son no significativos, porque indican un redondeo a la centena más próxima. La segunda persona podría decir: "¡Mi recibo de la luz fue de $ 200 cerrados!" La expresión "cerrados" indica que los dos ceros son significativos en este número. El número es correcto hasta el número completo más próximo. Se dice que los ceros finales que están antes del punto decimal son no significativos, a menos que alguna información adicional indique que lo son.

Ejemplo 2

¿Cuántos dígitos significativos hay en cada grupo de números?

(a) 493, 4.93, 49.3
(b) 507, 5.07, 50.7
(c) 26.0, 2.60, 0.260
(d) 160, 1600, 16 000
(e) 0.18, 0.018, 0.0018

Solución

(a) Hay tres: ninguno de los dígitos es cero.
(b) Hay tres: el cero está *entre* dígitos significativos.
(c) Hay tres: los ceros son *finales después* del punto decimal.
(d) Hay dos: los ceros son *finales antes* del punto decimal.
(e) Hay dos: los ceros son *iniciales*.

Ejemplo 3

¿Cuántos dígitos significativos hay en el número 0.0020?

Solución

Hay dos: los primeros ceros son *iniciales*; el último es *final después* del punto decimal.

¿Cuántos dígitos significativos hay en el número 10.00? **Ejemplo 4**

Solución

Hay cuatro: los dos últimos ceros son *finales después* del punto decimal; el primero está *entre* dígitos significativos.

¿Cuántos dígitos significativos hay en el número 10? **Ejemplo 5**

Solución

Sólo hay uno: el cero es *final antes* del punto decimal.

Para multiplicar números aproximados:

1. Se alinean los números por la derecha, se efectúa la multiplicación y se coloca el punto decimal.
2. Se redondea el resultado al número de dígitos significativos que tenga el factor con menos dígitos significativos.

Efectuar la multiplicación de los números aproximados siguientes y redondear correctamente el producto. **Ejemplo 6**

(a) 493×160
(b) 5.07×10.00
(c) 5.07×10

Solución

(a) 493 tiene tres dígitos significativos y 160 sólo tiene dos. Puesto que $493 \times 160 = 78\,880$ y el resultado se redondea a dos dígitos significativos, se obtiene 79 000.
(b) 5.07 tiene tres dígitos significativos y 10.00 tiene cuatro. Puesto que $5.07 \times 10.00 = 50.70$ y el resultado se redondea a tres dígitos significativos, se obtiene 50.7.
(c) 5.07 tiene tres dígitos significativos y 10 sólo tiene uno. Puesto que $5.07 \times 10 = 50.7$ y el resultado se redondea a un dígito significativo, se obtiene 50.

Es importante recordar que estas reglas de redondeo se aplican únicamente cuando se usan números aproximados, como las mediciones. No se aplican cuando se sabe que los números corresponden a valores exactos. Por ejemplo, si un bolígrafo cuesta \$ 0.79, se diría que tres bolígrafos cuestan $3 \times$ \$ 0.79 = \$ 2.37, porque son tres bolígrafos exactos que cuestan \$ 0.79 exactos cada uno.

Se acostumbra usar la notación científica para escribir cantidades muy grandes o muy pequeñas. Se dice que el cubo de Rubik tiene 43 252 003 274 489 856 000 o aproximadamente 43 trillones de configuraciones diferentes. La expresión 4.3×10^{19} es la notación científica de 43 000 000 000 000 000 000. Es decir, cuando se multiplica 4.3 por 10^{19}, el punto decimal se mueve 19 lugares hacia la derecha. Este resultado es razonable si se recuerda, por ejemplo, que $10^2 = 100$ y que en la multiplicación por 100 el punto decimal se mueve dos lugares hacia la derecha. Para escribir un número en notación científica, éste se expresa en la forma $n \times 10^p$, donde $1 \leq |n| < 10$ (que se lee "el valor absoluto de n es mayor o igual que 1 y menor que 10") y p es número entero.

Para expresar un número en notación científica:

1. Se coloca el punto decimal de tal modo que haya exactamente un dígito diferente de cero antes que él.
2. Se hace $p =$ al número de cifras decimales que debe moverse el punto decimal para colocarlo en su lugar original.
3. (a) Se multiplica por 10^p si el punto decimal debe moverse a la derecha.
   (b) Se multiplica por 10^{-p} si el punto decimal debe moverse a la izquierda.

Ejemplo 7

Expresar cada número en notación científica.

(a) 49
(b) 490
(c) 58.23

Solución

(a) $49 = 4.9 \times 10^1$.
(b) $490 = 4.9 \times 10^2$.
(c) $58.23 = 5.823 \times 10^1$.

Ejemplo 8

Expresar cada número en notación científica.

(a) 0.231
(b) 0.0056
(c) 5823

Solución

(a) $0.231 = 2.31 \times 10^{-1}$
(b) $0.0056 = 5.6 \times 10^{-3}$
(c) $5\,823 = 5.823 \times 10^{3}$ (También se cumple que $5\,823 = 58.23 \times 10^{2}$, pero esta expresión no es notación científica, puesto que 58.23 no está entre 1 y 10.)

En ocasiones, la notación científica se usa para aclarar el número de dígitos significativos que hay en un número. Por ejemplo, 2×10^{2} sólo tiene un dígito significativo, pero 2.00×10^{2} tiene tres. Al escribirse 2.00 se indica que los dos últimos ceros son significativos.

Ejemplo 9

Expresar cada número en la forma decimal.

(a) 6.3×10^{4}
(b) 2.13×10^{-1}
(c) 4.3×10^{-2}

Solución

(a) 63 000
(b) 0.213
(c) 0.043

Todas las computadoras deben usar números que están en un rango limitado. La mayoría pueden presentar de seis a ocho dígitos significativos. Cuando un número es muy grande o muy pequeño, se presenta en notación científica. Por lo general, las computadoras reemplazan la expresión "$\times$ 10" por la letra E. El número 6.3×10^{4} se escribiría 6.3E04 o 6.3 E4. No es raro que una máquina trabaje y presente en pantalla números en el rango de 10^{-38} a 10^{38} en notación científica. Sin ésta, una pantalla con seis u ocho dígitos significativos plantearía una seria limitación para efectuar cálculos.

Ejercicios

Suponer que en las adiciones siguientes los sumandos son cantidades aproximadas. Efectuar la suma y redondear correctamente el resultado. Ver el ejemplo 1.

1. $6.92 + 14.348$
2. $25.1 + 6.32 + 0.547$
3. $7.53 + 12.214$
4. $34.9 + 7.05 + 0.268$
5. $82 + 53.4 + 6.93$

Determinar el número de dígitos significativos en cada número. Ver los ejemplos 2 al 5.

6. 25.6	**7.** 3.14	**8.** 1.732
9. 7 083	**10.** 80	**11.** 9 000
12. 200	**13.** 71.30	**14.** 2.500
15. 6.0	**16.** 0.046	**17.** 0.0032
18. 0.067	**19.** 0.0300	**20.** 0.0070

Suponer que en las multiplicaciones siguientes los factores son cantidades aproximadas. Efectuar la multiplicación y redondear correctamente el resultado. Ver ejemplo 6.

21. 6.92×1.4
22. $0.213 \times 25 \times 4\,000$
23. $0.005 \times 12 \times 2.400$
24. 5.32×2.7
25. $31.2 \times 5 \times 400$

A continuación escribir cada uno de los números que se presentan en notación científica. Ver los ejemplos 7 y 8.

26. 45	**27.** 58	**28.** 231	**29.** 409
30. 6 000	**31.** 8 732	**32.** 0.027	**33.** 0.006
34. 0.0345	**35.** 0.4278		

A continuación, escribir cada uno de los números que se presentan en la forma decimal. Ver el ejemplo 9.

36. 6.7×10^3	**37.** 2.34×10^2
38. 8.35×10^{-2}	**39.** 5.08×10^{-1}
40. 9.1×10^{-3}	**41.** 8.2×10^2
42. 6.204×10^1	**43.** 3.452×10^3
44. 7.89×10^{-2}	**45.** 6.57×10^{-1}

***46.** En una ocasión, el matemático Edward Kasner pidió a su sobrino que propusiera un nombre para el número 1×10^{100}. El niño lo llamó *googol*; hoy, el nombre es de uso común.

(a) ¿Cuántos ceros hay cuando un googol se expresa en notación decimal?

(b) Un googolplex se expresa con un 1 seguido por un googol de ceros. Escribir un googolplex en notación científica.

*47. Qué es mayor: Un googol elevado a un googolplex o un googolplex elevado a un googol.

*48. Cierta microcomputadora presenta en pantalla números reales cuyos valores absolutos son 1 o mayores, pero menores que 10, en forma decimal redondeada a seis dígitos significativos. Los números restantes se presentan en notación científica con seis dígitos significativos. Determinar cómo aparecerían en pantalla los números siguientes:

(a) 32
(b) −4.32
(c) 7.0021
(d) −3 762 142
(e) 28.27143
(f) 89 412 631
(g) −0.000021579

*49. Un número está en la forma exponencial normalizada cuando se expresa como $n \times 10^p$, donde $0.1 \leq |n| < 1$. Expresar los números siguientes en la forma exponencial normalizada.

(a) 26.31
(b) 0.00251
(c) 5 863
(d) 4.536

2.6. ORDEN DE LAS OPERACIONES

Considérese el problema $2 + 3 \times 5$. Algunas personas dirían que el resultado es 25, porque $2 + 3 = 5$ y $5 \times 5 = 25$. Otros dirían que la respuesta es 17, porque $3 \times 5 = 15$ y $2 + 15 = 17$. Para que no haya dos o más resultados diferentes en cada problema, los matemáticos han acordado que 17 es la respuesta correcta a este problema. Conocer el orden en que se efectúan las operaciones es casi tan importante como saber las tablas de sumar y multiplicar. Muchos de los lenguajes de programación se apegan a la convención matemática para el orden de las operaciones.

Orden de las operaciones

1. Primero se efectúan las operaciones que están dentro de signos de agrupación. Dentro de los signos de agrupación, se sigue el orden que se indica a continuación.
2. Exponentes.
3. Multiplicación y división (de izquierda a derecha).
4. Suma y resta (de izquierda a derecha).

Los signos de agrupación incluyen los paréntesis redondos ( ), los corchetes [ ], las llaves { } y las barras en las fracciones decimales periódicas. La evaluación de las expresiones que están entre signos de agrupación se hace en el orden establecido de exponentes, multiplicación, división, suma y resta. Si hay signos de agrupación anidados (uno dentro de otro), se trabaja de adentro hacia afuera. Por ejemplo, en la expresión $1 + \{2 - [3 + 2(4 + 5)]\}$, primero se haría $(4 + 5)$, y quedaría $1 + \{2 - [3 + 2(9)]\}$. El paso siguiente sería efectuar $[3 + 2(9)] = 21$, quedando $1 + \{2 - 21\}$. Puesto que $2 - 21 = -19$, se tiene $1 + \{-19\} = -18$.

La multiplicación y división se enlistan en el mismo nivel dentro del orden de las operaciones porque se efectúan de izquierda a derecha según se presenten. Por ejemplo, $8 \div 4 \times 2 = 2 \times 2 = 4$, pero $8 \div (4 \times 2) = 8 \div 8 = 1$, porque los paréntesis indican que primero se realice la multiplicación. La suma y resta se enlistan en el mismo nivel dentro del orden de las operaciones, por lo que también se efectúan de izquierda a derecha conforme aparecen.

Ejemplo 1

Evaluar $2(4 + 3)^2$.

Solución

$2(4 + 3)^2$ El paréntesis indica que $4 + 3$ se efectúa primero.
$2(7)^2$ El exponente afecta sólo a 7.
$2(49)$ La multiplicación se efectúa después.
98

Ejemplo 2

Evaluar $12 \div 4(2)$.

Solución

No hay signos de agrupación ni exponentes.

$(12 \div 4)(2)$ Primero se efectúa la división.
$3(2)$ Después se efectúa la multiplicación.
6

Ejemplo 3

Evaluar $-1[2(3 + 1) - 5]$.

Solución

$-1[2(3 + 1) - 5]$ (agrupamiento interior)
$-1[2(4) - 5]$ (agrupamiento exterior)
$-1[8 - 5]$
$-1[3]$ (multiplicación)
-3

Ejemplo 4

Evaluar $3[2^2 - 3(2)]$.

Solución

$3[4 - 6]$
$3(-2)$
-6

Las reglas del orden de las operaciones son ambiguas en un problema como -3^2. Los matemáticos tratan el signo negativo como el signo del resultado. Es decir, $-3^2 = -9$. Sin embargo, muchas computadoras tratan el signo negativo como parte del número que se elevará al cuadrado. Por tanto, $-3^2 = (-3)(-3) = 9$. Hay dos aspectos importantes en relación a esta diferencia de interpretación. Primero, es necesario saber cómo maneja el problema la computadora con la que se está trabajando, y segundo, es necesario el uso de paréntesis para evitar confusiones. $(-3)^2$ indica claramente $+9$, en tanto que $-(3)^2$ indica claramente -9.

En BASIC, Pascal y la mayoría de los lenguajes se usan los signos más (+) y menos (−) para indicar suma y resta, pero se emplea el asterisco (*) para la multiplicación y la diagonal (/) para la división. Cuando se escriban expresiones aritméticas en una computadora, es necesario indicar todas las multiplicaciones. En álgebra, AB significa A veces B, pero una computadora interpretaría AB como una sola variable. Para decir A por B, se escribe A*B. Asimismo, es imposible escribir las fracciones en forma vertical. Se escribe $\frac{3-2}{4-1}$ como $(3 - 2)/(4 - 1)$. Sin paréntesis, $3 - 2/4 - 1$ daría $3 - 0.5 - 1$. (El orden de las operaciones requiere que la división se realice antes que la resta.) Los paréntesis redondos son el único signo de agrupación en la programación de computadoras. Deben usarse paréntesis siempre que ayuden a aclarar lo que se está haciendo, sean o no necesarios.

Para escribir una expresión aritmética en una computadora:

1. Usar + para la suma.
2. Usar − para la resta.
3. Usar * para la multiplicación.
   Deben indicarse todas las multiplicaciones.
4. Usar / para la división.
5. Usar ( ) para agrupar.

Ejemplo 5

Escribir las expresiones siguientes como si se usara un lenguaje de computación como el BASIC o el Pascal:

(a) 2 + 5
(b) 7A
(c) 3(X + 5)

Solución

(a) 2 + 5 se expresa igual en programación.
(b) 7A se expresa como 7*A, ya que todas las multiplicaciones tienen que indicarse.
(c) 3(X + 5) se expresa como 3*(X + 5).

Ejemplo 6

Escribir las expresiones siguientes como si se usara un lenguaje de computación como el BASIC o el Pascal:

(a) $\frac{7}{XY}$

(b) $\frac{7Y}{X}$

(c) 7[2 + 3(A − 1)]

Solución

(a) 7/(X*Y) Se usan los paréntesis para que la multiplicación se efectúe antes que la división.
(b) (7*Y)/X o 7*Y/X Los paréntesis se usan para fines de claridad.
(c) 7*(2 + 3*(A − 1)) Los paréntesis son el único signo de agrupación.

En la mayoría de las versiones de BASIC, el símbolo de caret ^ es el signo de exponenciación. Se escribe X^3 para indicar X al cubo. Sin embargo, en programación es más recomendable escribir X*X*X. En una conocida microcomputadora, por ejemplo, 163^3 se da como 4330745.7, con un error de 1.3, mientras que 163*163*163 es 43307747, el resultado exacto. El Pascal no tiene signo de exponenciación, por lo que es natural usar la multiplicación repetida en lugar de exponentes cuando éstos son pequeños.

En programación también es recomendable escribir las expresiones aritméticas de tal modo que la división se efectúe al último, siempre que sea posible. Considérese el problema siguiente: "Una compañía

de servicios públicos tiene 200 000 clientes cuyos recibos ascienden a \$86 promedio en un periodo de 31 días. ¿Cuál es el ingreso diario de la compañía?" Si primero se encuentra la cuenta promedio diaria de un cliente (\$86 ÷ 31) redondeada a \$2.77 y se multiplica por 200 000, se obtendría \$554 000.00. Si primero se encuentra el ingreso mensual de la compañía (200 000 × \$86 = \$17 200 000), y después el ingreso diario (\$17 200 000 ÷ 31), se obtendría \$554 838.71. La diferencia de \$838.71 se debe sólo al error de redondeo introducido por la división 86 ÷ 31. Es decir, el error de redondeo debido a la división se altera por una composición o amplificación cuando se realiza la multiplicación.

Ejercicios

Evaluar las expresiones siguientes. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. $4 + 2(5)$
2. $(4 + 2)(5)$
3. $8 - 2(3)$
4. $(8 - 2)(3)$
5. $(5 + 3^2)(7)$
6. $(5 + 3)^2(7)$
7. $-8 \div 4 \div 2$
8. $-8 \div (4 \div 2)$
9. $-8 \div 4(2)$
10. $-8 \div (4 \cdot 2)$
11. $4[(5 + 3) - 2^2]$
12. $4[(5 + 3) - 2]^2$
13. $6[7 - (1 - 3)]^2$
14. $6[7 - (1 - 3)^2]$
15. $2[5 + 3(7 - 4^2) - 6]$
16. $2[5 + 3(7 - 4)^2 - 6]$
17. $2[(5 + 3(7 - 4) - 6]$
18. $3(4 + 1)^2 + 2(3 - 5) - 6(7)$
19. $3\{1 + 2[4 + 5(6 - 7) + 8] - 9\}$
20. $2\{2[2(2 + 1) + 1] + 1\}$

Escribir las expresiones siguientes como si se usara un lenguaje de programación como el BASIC o el Pascal. Ver los ejemplos 5 y 6.

21. $4Y + 2X$
22. $4(Y - 2X)$
23. $(X + 2Y)(2X - Y)$
24. $(X - 3)(X - 4)$
25. $X - 2Y + 3$
26. $7[X - 3(2Y + 4) + 2]$
27. $3[X + 2(Y - 1)]$
28. $X[X + 2(X - 1)]$ Y
29. $\dfrac{4AB}{5CD}$
30. $4 + \dfrac{X}{Y} - 5$
31. $\dfrac{4 + X}{Y - 5}$
32. $A + \dfrac{3}{B} + 2$
33. $\dfrac{A + 3}{B + 2}$
34. $X\{X[X(X + 1) + 1] + 1\} + 1$

35. $3\{X[Y(Z-2)-3]-4\}$ 36. $2\{X[2(Y-1)+2]-3\}$

37. 2^3 38. $X^2 + Y^2$

39. XY^2 40. $\dfrac{2^2}{Y^2}$

*41. A principios de los años cincuenta, el polaco Jan Lukasiewicz inventó una notación que no requiere el uso de paréntesis. Esta notación, conocida como *notación polaca*, es usada en algunos lenguajes de computación y por algunas calculadoras manuales programables. En la notación polaca los operadores se escriben después de los operandos. Si las operaciones se efectúan de izquierda a derecha, los operandos de cada operador son los dos que se han evaluado en último término. A continuación se presentan ejemplos.

Notación polaca	*Significado algebraico*	
XY −	X − Y	Los dos operandos que preceden a "−" son X y Y.
ABC + *	A(B + C)	El signo " + " está precedido por B y C. Se tiene (B + C). Esta expresión pasa a ser uno de los operandos de la siguiente operación. Por tanto, el signo "*" se aplica a A y (B + C).
BC + A*	(B + C) A	El signo "+" está precedido por B y C. Así, se tiene (B + C). Esta expresión pasa a ser uno de los operandos de la siguiente operación. Por tanto, el signo "*" se aplica a (B + C) y A.
YZ/X +	Y/Z + X	El signo "/" está precedido por Y y Z. Por tanto, se tiene Y/Z. Esta expresión pasa a ser uno de los operandos de la siguiente operación. El signo "+" se aplica a (Y/Z) y X.
ZXY* −	Z − XY	El signo "*" está precedido por X y Y. Así, se tiene XY. Esta expresión pasa a ser uno de los operandos de la siguiente operación. El signo "−" se aplica a Z y XY.

Escribir las expresiones siguientes en notación polaca.

(a) ABC (b) AB + C (c) X − YZ
(d) YZ − X (e) Y(Z − X) (f) (A + B)/(C + D)

2.7. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Muchos estudiantes de álgebra elemental conocen las propiedades de los números reales. Pero debe darse especial atención a ellas en la

programación. Estas propiedades se conocen como *propiedades de campo*.

Propiedades de campo

1. Propiedades de cerradura:

   Si $a, b \in R$, entonces $a + b \in R$.
   Si $a, b \in R$, entonces $ab \in R$.

2. Propiedades conmutativas:

   Si $a, b \in R$, entonces $a + b = b + a$.
   Si $a, b \in R$, entonces $ab = ba$.

3. Propiedades asociativas:

   Si $a, b, c \in R$, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   Si $a, b, c \in R$, entonces $(ab)c = a(bc)$.

4. Propiedad distributiva:

   Si $a, b, c \in R$, entonces $a(b + c) = ab + ac$.

5. Propiedades de los neutros:

   Si $a \in R$, entonces $a + 0 = 0 + a = a$.
   Si $a \in R$, entonces $a(1) = 1(a) = a$.

6. Propiedades de inversión:

   Si $a \in R$, entonces existe un número $b \in R$ tal que $a + b = b + a = 0$.
   Si $a \in R$, $a \neq 0$, entonces existe un número $c \in R$ tal que $ac = ca = 1$.

No basta con memorizar estas propiedades. Es necesario conocerlas a fondo.

1. ***Propiedad de cerradura:*** La propiedad de cerradura establece que cuando se efectúa una operación con dos elementos cualesquiera de un conjunto, el resultado también será miembro de dicho conjunto.

Ejemplo 1

Considérese el conjunto de los números naturales. ¿Para cuáles de las cuatro operaciones aritméticas básicas es cerrado este conjunto?

Solución

Es cerrado para la adición: Cuando se suman dos números naturales, el resultado es un número natural.

No es cerrado para la sustracción: Si se restan dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural. Por ejemplo, $2 - 3 = -1$.

Es cerrado para la multiplicación. Cuando se multiplican dos números naturales, el producto es un número natural.

No es cerrado para la división: Si se dividen dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural. Por ejemplo, $2 \div 3 = 2/3$.

2. ***Propiedad conmutativa:*** La propiedad conmutativa establece que el orden de los operandos puede cambiarse sin afectar el resultado.

Ejemplo 2

Considérese el conjunto de los números naturales. ¿Cuáles de las cuatro operaciones aritméticas básicas son conmutativas?

Solución

La adición es conmutativa: $2 + 3 = 3 + 2$, etc.

La sustracción no es conmutativa: Por ejemplo, $2 - 3 \neq 3 - 2$.

La multiplicación es conmutativa: $2(3) = 3(2)$, etc.

La división no es conmutativa: Por ejemplo, $2 \div 3 \neq 3 \div 2$; $2/3 \neq 3/2$.

3. ***Propiedad asociativa:*** La propiedad asociativa establece que cuando se usa la misma operación más de una vez, la agrupación de los operandos puede cambiarse sin afectar el resultado.

Ejemplo 3

Considérese el conjunto de los números naturales. ¿Cuáles de las cuatro operaciones aritméticas básicas son asociativas?

Solución

La adición es asociativa: $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$

$5 + 4 = 2 + 7.$

La sustracción no es asociativa: $(2 - 3) - 4 \neq 2 - (3 - 4)$

$-1 - 4 \neq 2 - (-1)$

$-5 \neq 3.$

La multiplicación es asociativa: $(2 \cdot 3)4 = 2(3 \cdot 4)$
$(6)4 = 2(12).$
La división no es asociativa: $(2 \div 3) \div 4 \neq 2 \div (3 \div 4)$
$(2/3) \div 4 \neq 2 \div (3/4)$
$1/6 \neq 8/3.$

4. ***Propiedad distributiva.*** En la sección 2.3 se vieron ya las dos propiedades distributivas de la intesección y la unión de conjuntos. La propiedad distributiva se usa cuando aparecen dos operaciones *diferentes* en la misma expresión. Sólo hay una propiedad distributiva para los números reales. Se dice que la multiplicación se distribuye en la adición.

Ejemplo 4

Considérese el conjunto de los números naturales.

(a) ¿La multiplicación se distribuye en la adición?
(b) ¿La adición se distribuye en la multiplicación?

Solución

(a) La multiplicación se distribuye en la adición:

$$2(3 + 4) = 2(3) + 2(4)$$
$$2 \quad (7) \quad = \quad 6 \quad + \quad 8.$$

(b) La adición no se distribuye en la multiplicación:

$$2 + (3 \times 4) \neq (2 + 3) \times (2 + 4)$$
$$2 + \quad 12 \quad \neq \quad 5 \quad \times \quad 6$$
$$14 \neq 30.$$

5. ***Propiedad de los neutros:*** El elemento neutro de una operación podría describirse como el miembro del conjunto que no tiene ningún efecto en una expresión cuando es uno de los operandos. Se dice que 0 es el neutro aditivo en el conjunto de los números reales, y que 1 es el neutro multiplicativo en el conjunto de los números reales. Obsérvese el requerimiento de conmutatividad de la definición.

Ejemplo 5

Considérese el conjunto de los números naturales. ¿Cuáles de las cuatro operaciones aritméticas básicas poseen un elemento neutro?

Solución

Adición: No hay elemento neutro, ya que $0 \in N$.
Sustracción: No hay elemento neutro.

Multiplicación: El elemento neutro es 1.

División: No hay elemento neutro. (Podría pensarse que 1 es el elemento neutro, ya que $3 \div 1 = 3$, pero la definición requiere que se cumpla también $1 \div 3 = 3$.)

6. ***Propiedad de inversión***: Se dice que dos números son inversos bajo una operación si el resultado de la misma es el elemento neutro. Obsérvese el requerimiento de conmutatividad de la definición.

Ejemplo 6

Considérese el conjunto de los números racionales. ¿Para cuáles de las cuatro operaciones aritméticas básicas existen inversos para todo número diferente de cero?

Solución

Adición: Todos los racionales tienen un inverso. El elemento neutro es 0 y $2/3 + (-2/3) = 0$, etc.

Sustracción: No hay inversos, porque no existe ningún elemento neutro.

Multiplicación: Todo número racional diferente de cero tiene un inverso. El elemento neutro es 1 y $(2/3)(3/2) = 1$, etc.

División: No hay inversos, porque no existe ningún elemento neutro.

Ejemplo 7

Determinar cuáles de las seis propiedades de campo se ilustran en las proposiciones siguientes:

(a) $3 + (4 + 5) = 3 + (5 + 4)$
(b) $3 + (4 + 5) = (4 + 5) + 3$
(c) $3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5$

Solución

(a) Se aplicó la propiedad conmutativa para cambiar el orden de los sumandos de $3 + (4 + 5)$ a $3 + (5 + 4)$.
(b) Se aplicó la propiedad conmutativa. La cantidad $(4 + 5)$ es la misma en ambos miembros de la igualdad. El orden se cambió de $3 + (4 + 5)$ a $(4 + 5) + 3$.
(c) Se aplicó la propiedad asociativa. La agrupación se cambió de 4 con 5 a 4 con 3.

Ejemplo 8

Determinar cuáles de las seis propiedades de campo se ilustran en las proposiciones siguientes:

(a) $3(4 + 5) = 3(4) + 3(5)$
(b) $3 + 0 = 0 + 3 = 3$
(c) $(7/8)(8/7) = 1$

Solución

(a) La propiedad distributiva.
(b) La propiedad del neutro aditivo. Al sumar 0 el 3 no resulta afectado.
(c) La propiedad del inverso multiplicativo. El producto de los dos números 7/8 y 8/7 es 1, que es el elemento neutro multiplicativo.

No obstante que las propiedades de campo se usan de manera automática cuando se efectúan operaciones aritméticas con números reales, no se cumplen necesariamente en la aritmética de computadoras. Por ejemplo, considérese (1/39 + 1/18) + 1/157. El resultado que da una conocida microcomputadora es 0.875660079. Pero cuando se aplica la propiedad asociativa para reagrupar los términos en la forma 1/39 + (1/18 + 1/157), el resultado que da es 0.87566008. (No todas las computadoras presentarán discrepancias para este problema particular, pero se presentarán otras similares en otros problemas.) La discrepancia no es muy grande, pero el simple hecho de que exista es una violación de la propiedad asociativa. La propiedad distributiva también falla en ciertos problemas. Por ejemplo, (1/131)(1/86 + 1/112) se da como 0.000156919683, pero cuando se aplica la propiedad distributiva, (1/131)(1/86) + (1/131)(1/112) se da como 0.000156919682. No obstante, la propiedad conmutativa se cumple en la aritmética de computadoras y en la de números reales.

Ejercicios

¿Cuáles de los conjuntos siguientes son cerrados en la adición? ¿Cuáles lo son en la multiplicación? Ver el ejemplo 1.

1. Enteros.
2. Enteros positivos.
3. Enteros negativos.
4. Enteros pares.
5. Enteros impares.
6. Números racionales.
7. Números irracionales.
8. $\{0, 1\}$.
9. $\{1, -1\}$.
10. $\{x | x$ es un entero positivo de tres dígitos$\}$.

¿Cuáles de los conjuntos siguientes poseen un elemento neutro aditivo? ¿Cuáles poseen un elemento neutro multiplicativo? Ver el ejemplo 5.

11. Enteros.
12. Enteros positivos.

13. Enteros negativos.
14. Enteros pares.
15. Enteros impares.
16. Números racionales.
17. Números irracionales.
18. $\{0, 1\}$.
19. $\{1, -1\}$.
20. En la sección 2. 3 se vio que la intersección y la unión de conjuntos tienen las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. ¿Existe un elemento neutro para la intersección de conjuntos? ¿Existe un elemento neutro para la unión de conjuntos?

¿Cuáles de los conjuntos siguientes tienen un inverso aditivo para todos sus elementos? ¿Cuáles tienen un inverso multiplicativo para todos sus elementos diferentes de cero? Ver el ejemplo 6.

21. Enteros.
22. Enteros positivos.
23. Enteros negativos.
24. Enteros pares.
25. Enteros impares.
26. Números racionales.
27. Números irracionales.
28. $\{0, 1\}$.
29. $\{1, -1\}$.
30. $\{x | x$ es un entero positivo de tres dígitos$\}$.

Determinar cuáles de las seis propiedades de campo se ilustran en las proposiciones siguientes. Ver los ejemplos 7 y 8.

31. $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$
32. $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 5 \cdot (3 \cdot 4)$
33. $(3 + 4) + 5 = (4 + 3) + 5$
34. $3(4 + 5) = 3(4) + 3(5)$
35. $7 + 0 = 7$
36. $(5/6)(6/5) = 1$
37. $8(1) = 8$
38. $5 + (-5) = 0$
39. $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 4 \cdot (3 \cdot 5)$
40. $(3 + 4) + 5 = (5 + 4) + 3$
41. $(2/3) + (-2/3) = 0$
42. $(1/9)(9) = 1$

*43. Sea que el símbolo ^ denote la operación de exponenciación (es decir, $a \,\hat{}\, b = a^b$) definida para números enteros.

(a) Dar un ejemplo para demostrar que ^ no es, en general, conmutativa.
(b) ¿Para qué valores de a y b se cumple $a \,\hat{}\, b = b \,\hat{}\, a$?

*44. ¿La operación ^ es asociativa (ver el problema 43 anterior)?
*45. Sea que $^\circ$ denote la operación con números entero definida como $a \,^\circ\, b = a + b - 2$.

(a) ¿Es conmutativa la operación $\circ$?
(b) ¿Existe en I un elemento neutro para la operación $\circ$?
(c) ¿Existe en I un inverso para la operación $\circ$ para todo entero?

*46. Explicar por qué los conjuntos siguientes no son cerrados para la división.

(a) Enteros.
(b) Números racionales.
(c) Números reales.

2.8. ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Con frecuencia, la representación que dan las computadoras de un número real son valores redondeados. Se han visto ya algunos de los problemas que pueden surgir debido al error de redondeo. En muchas aplicaciones, tales errores son insignificantes. Sin embargo, en el área de la contabilidad los resultados deben ser exactos hasta los centavos. Los cálculos financieros en los que intervienen sumas, restas y multiplicaciones con frecuencia se realizan utilizando enteros para el número de centavos presentes. Los enteros se representan sin error de redondeo en las computadoras. En muchos de los lenguajes de computación es posible hacer "artmética de enteros".

En la aritmética de enteros, éstos se tratan como si el conjunto fuera cerrado para todas las operaciones, incluyendo la división. Es decir, el cociente de dos enteros es un entero. (La división por cero continúa sin definirse.) Se sigue el orden usual de las operaciones, pero se descarta cualquier parte fraccionaria de un cociente. Se dice que el número se *trunca*. La truncación no es lo mismo que el redondeo. Por ejemplo, 9.9 se trunca a 9, pero 9.9 se redondea a 10.

Para realizar una operación en aritmética de enteros:

1. Se sigue el orden usual de las operaciones.
2. Se omiten las fracciones del cociente de un problema de división.

Ejemplo 1

Efectuar las operaciones siguientes utilizando la aritmética de los números reales; realizar después las mismas operaciones utilizando aritmética de enteros.

(a) 7/3
(b) 2/5 + 3/5
(c) (2 + 3)/5

Solución

(a) Reales: 7/3 = 2 1/3.
Enteros: 7/3 = 2 (se omite la fracción 1/3).
(b) Reales: 2/5 + 3/5 = 5/5 = 1.
Enteros: 2/5 + 3/5 = 0 + 0 = 0.
(c) Reales: (2 + 3)/5 = 5/5 = 1.
Enteros: (2 + 3)/5 = 5/5 = 1.

Ejemplo 2

Efectuar las operaciones siguientes utilizando la aritmética de los números reales; realizar después las mismas operaciones utilizando la aritmética de enteros.

(a) 5/3
(b) 1/4 + 3/4
(c) (5 + 5)/4

Solución

(a) Reales: 5/3 = 1 2/3.
Enteros: 5/3 = 1 (se omite 2/3).
(b) Reales: 1/4 + 3/4 = 4/4 = 1.
Enteros: 1/4 + 3/4 = 0 + 0 = 0.
(c) Reales: (5 + 5)/4 = 10/4 = 5/2 = 2 1/2.
Enteros: (5 + 5)/4 = 10/4 = 2 (se omite 1/2).

Puede ser conveniente conocer el residuo de las divisiones con enteros como las antes definidas. Por ejemplo, si se imprime una larga lista de datos, se podría ignorar uno de cada cinco renglones para facilitar su lectura. Los renglones pueden numerarse e imprimirse uno en blanco para los números que tienen un residuo cero cuando se dividen entre cinco. El Pascal y algunas versiones de BASIC permiten calcular el residuo si se utiliza el comando MOD, este nombre se deriva de la palabra *módulo*. El conjunto 0, 1, 2, 3 es un ejemplo de un sistema de módulo si la adición y la multiplicación se definen por las tablas 2.3 y 2.4.

Tabla 2.3

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabla 2.4

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Hay una interpretación gráfica de la adición definida de esta manera. Los números 0, 1, 2 y 3 se colocan alrededor de una carátula (ver figura 2.24). La adición se efectúa moviendo la manecilla central.

Figura 2.24

Por ejemplo, si la manecilla estuviera en el 3, al sumar 3 se movería tres espacios: $3 + 3 = 2$.

Este concepto puede generalizarse.

Definición

Un sistema de módulo n es un conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1\}$ con la adición y la multiplicación de dos números a y b del conjunto definidas y expresadas de la manera siguiente:

(a) $(a + b)$ MOD n es el residuo de la división $(a + b)/n$.
(b) (ab) MOD n es el residuo de la división $(ab)/n$.

Por tanto, $(5 + 3)$ MOD $4 = 0$, puesto que $5 + 3 = 8$, y $8 \div 4 = 2$ tiene residuo 0. Además, (5×3) MOD $4 = 3$, puesto que $5 \times 3 = 15$, y $15 \div 4$ tiene residuo 3. La expresión "el residuo es 3" puede abreviarse si se escribe R 3. Por tanto, $15 \div 4 = 3$ R 3.

Ejemplo 3

Evaluar las expresiones siguientes:

(a) 9 MOD 5
(b) $(4 + 3)$ MOD 5
(c) $(2 + 3 \times 4)$ MOD 6

Solución

(a) $9/5 = 1$ R 4; por lo tanto 9 MOD $5 = 4$
(b) $(4 + 3)/5 = 7/5 = 1$ R 2; por lo tanto $(4 + 3)$ MOD $5 = 2$
(c) $(2 + 3 \times 4)/6 = 14/6 = 2$ R 2; por lo tanto $(2 + 3 \times 4)$ MOD $6 = 2$

Ejemplo 4

Evaluar las expresiones siguientes:

(a) (7 + 8) MOD 12
(b) (13 + 14) MOD 26
(c) (6 × 6) MOD 12

Solución

(a) (7 + 8)/12 = 15/12 = 1 R 3; por lo tanto (7 + 8) MOD 12 = 3
(b) (13 + 14)/26 = 27/26 = 1 R 1; por lo tanto (13 + 14) MOD 26 = 1
(c) (6 × 6)/12 = 36/12 = 3 R 0; por lo tanto (6 × 6) MOD 12 = 0 ■

Ejercicios

Efectuar las operaciones indicadas utilizando la aritmética de los números reales; indicar después las mismas operaciones utilizando la aritmética de enteros. Ver los ejemplo 1 y 2.

1. 12/5	**2.** 14/3	**3.** 21/6
4. 3/7 + 4/7	**5.** 7/11 + 9/11 + 6/11	**6.** 22/7 + 13/7
7. 4/5 · 20	**8.** 4 · 20/5	**9.** 21 · 3/7
10. 21 · (3/7)	**11.** (3/4)(8/9)(6)	**12.** 3/4 · 8/9 · 6
13. 48/5 · 2/3	**14.** 48/(5 · 2)/3	**15.** (48/5)(2/3)
16. (1/2)(2/3) + (1/4)(8/3)	**17.** (1/3)(3/5) + (1/10)(8)	**18.** (2/3)(3/5) + (3/4)
19. 15/4 · 2/3	**20.** 7 · 9/2/3	

Evaluar las expresiones siguientes. Ver los ejemplo 3 y 4.

21. (2 + 1) MOD 3	**22.** (3 + 2) MOD 4
23. (4 + 4) MOD 5	**24.** (3 × 3 + 4) MOD 5
25. (2)(2 + 1) MOD 3	**26.** (1 + 2)(3) MOD 4
27. (4 + 5)(5) MOD 7	**28.** (5)(4)(3) MOD 7
29. (3)(3)(3) MOD 4	**30.** (2)(2)(2) MOD 3
31. (4)(3)(2) MOD 5	**32.** [5(2) + 3(4)] MOD 6
33. [3(5) + 4(2)] MOD 6	**34.** [6 (3) + 2(5)] MOD 7
35. [3(5) + 4(2)] MOD 7	**36.** [3(5) + 4(2)] MOD 8

Un conjunto S con una operación $^\circ$ definida por dos miembros cualesquiera de S es un grupo si:

(a) S es cerrado para la operación $^\circ$
(b) La operación $^\circ$ es asociativa.
(c) Existe en S un elemento neutro para la operación $^\circ$.
(d) Para todo elemento de S, existe en S un inverso para la operación $^\circ$.

La teoría de grupos tiene aplicaciones en química y física, así como en la solución de acertijos como el cubo de Rubik. En la ciencia de la computación, tiene aplicaciones en la detección de errores y en la corrección de códigos. Para cada conjunto y operación, determinar si el sistema es un grupo.

***37.** Enteros, adición.
***38.** $\{0, 1, 2\}$, adición en MOD 3.
***39.** $\{0, 1, 2\}$, multiplicación en MOD 3.
***40.** $\{0, 1\}$, multiplicación.
***41.** Números racionales, $^\circ$ definida como $a \circ b = ab - 2$.
⇒42. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo para presentar un algoritmo que enliste los cuadrados de los números del 1 al 50, ignorando un renglón cada cinco.

Revisión de capítulo

$\{x | x \in A \text{ y } x \in B\} =$ _____ .
$\{x | x \in A \text{ o } x \in B\} =$ _____ .

Al conjunto mayor en consideración en un problema dado se le conoce como conjunto _____ .

$\{x | x \in U, x \notin A\} =$ _____ .

A un diagrama que ilustra relaciones entre conjuntos se le llama diagrama _____ .

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los números _____ .
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ es el conjunto de los _____ .
$\{x | x = a/b$, donde $a, b \in I, b \neq 0\}$ es el conjunto de los números _____ .

Todo número que puede expresarse como una fracción decimal periódica es un número _____ .

Todo número que no puede expresarse como una fracción decimal periódica es un número _____ .

El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números _____ y del conjunto de los números _____ .

Un número en notación científica se expresa en la forma $n \times 10^p$

donde _____ $\leqslant |n| <$ _____ y p es un _____.

$(a + b)$ MOD n es el residuo de la división _____.

Prueba de capítulo

Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{3, 4, 5, 6\}$
$C = \{1, 4, 5, 7\}$

Encontrar los conjuntos siguientes:

1. (a) $A \cap B$ (b) $B \cup C$
2. (a) $A' \cap C$ (b) $B' \cup C$
3. (a) $A' \cap (B \cup C)$ (b) $A \cup (B \cap C)'$

Sean U = El conjunto de solicitantes de un trabajo de procesamiento de datos.
C = El conjunto de solicitantes que saben COBOL.
F = El conjunto de solicitantes que saben FORTRAN.
B = El conjunto de solicitantes que saben BASIC.

Escribir la descripción de los conjuntos siguientes utilizando los símbolos $\cap$, $\cup$ y $'$.

4. (a) El conjunto de solicitantes que saben COBOL o FORTRAN.
   (b) El conjunto de solicitantes que saben FORTRAN y BASIC.
5. (a) El conjunto de solicitantes que saben BASIC, pero no FORTRAN.
   (b) El conjunto de solicitantes que saben COBOL o FORTRAN, pero no BASIC.
6. (a) El conjunto de solicitantes que no saben BASIC ni COBOL.
   (b) El conjunto de solicitantes que saben BASIC y COBOL, pero no FORTRAN.

Trazar diagramas de Venn para ilustrar los conjuntos siguientes.

7. $A' \cap B$.
8. $A \cup B'$.

Demostrar que las proposiciones siguientes son verdaderas.

9. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
10. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Trazar diagramas de Venn para ilustrar los conjuntos siguientes.

11. $A \cap (B \cup C)$.
12. $(A \cap B)' \cup C$.

Trazar diagramas de Venn para demostrar que las propiedades siguientes son verdaderas.

13. $(A \cup B) \cup C' = A \cup (B \cup C')$.
14. $A \cap (B \cap C)' = (A \cap B') \cup (A \cap C')$.

Determinar qué propiedades se ilustran en las proposiciones siguientes.

15. (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    (b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    (c) $A \cup (B \cup C) = (B \cup C) \cup A$

Marcar el o los conjuntos a los que pertenezcan los números de la tabla siguiente.

	Número	*Números naturales*	*Enteros*	*Números racionales*	*Números reales*
16(a)	3				
(b)	$-2/3$				
(c)	$\sqrt{11}$				
(d)	-5				
(e)	1.3				
(f)	$\sqrt{9}$				

Escribir los conjuntos siguientes enlistando sus elementos.

17. $\{x \mid x \in N, x \geqslant 5\}$.
18. $\{x \mid x \in I, x < 2\}$.

Encontrar los conjuntos siguientes:

19. $N \cup R$.
20. $Q \cap I$.

21. Suponer que en las siguientes adiciones los sumandos son números aproximados, y redondear correctamente la suma.

(a) 41.23 + 6.2.
(b) 7.93 + 0.147.

22. Determinar cuántos dígitos significativos hay en los números siguientes.

(a) 0.0023.
(b) 0.230.
(c) 230.

23. Suponer que en las siguientes multiplicaciones los factores son números aproximados, y redondear correctamente el producto.

(a) 0.41 × 0.003.
(b) 0.413 × 25.

24. Expresar en notación cientffica los números siguientes.

(a) 835.
(b) 0.0051.

25. Expresar en la forma decimal los números siguientes.

(a) 7.93×10^{-2}.
(b) 6.4×10^{3}.

Evaluar las expresiones siguientes.

26. $(1 + 2)^3 (3)$.
27. $100 \div 20 \div 5$.
28. $5[2^3 + 2(4 - 1)^2 - 1]$.

Escribir las expresiones siguientes como si se usara un lenguaje de programación como el BASIC o el Pascal.

29. $3[X - 3(Y - 1)]$.
30. $\dfrac{3A + B}{4CD}$.
31. ¿Es cerrado el conjunto de los enteros positivos pares para la adición? ¿Lo es para la multiplicación?

32. ¿Existe un neutro aditivo en el conjunto de los enteros positivos impares? ¿Existe un neutro multiplicativo?
33. ¿Todo elemento del conjunto de los enteros positivos pares tiene un inverso aditivo? ¿Tiene un inverso multiplicativo?
34. Determinar cuáles de las propiedades de campo se ilustran en las proposiciones siguientes.

    (a) $(2 \cdot 4) \cdot 6 = 2 \cdot (4 \cdot 6)$.
    (b) $(2 + 4) + 6 = 6 + (2 + 4)$.
    (c) $4/7 + (-4/7) = 0$.

35. Determinar cuáles de las propiedades de campo se ilustran en las proposiciones siguientes.

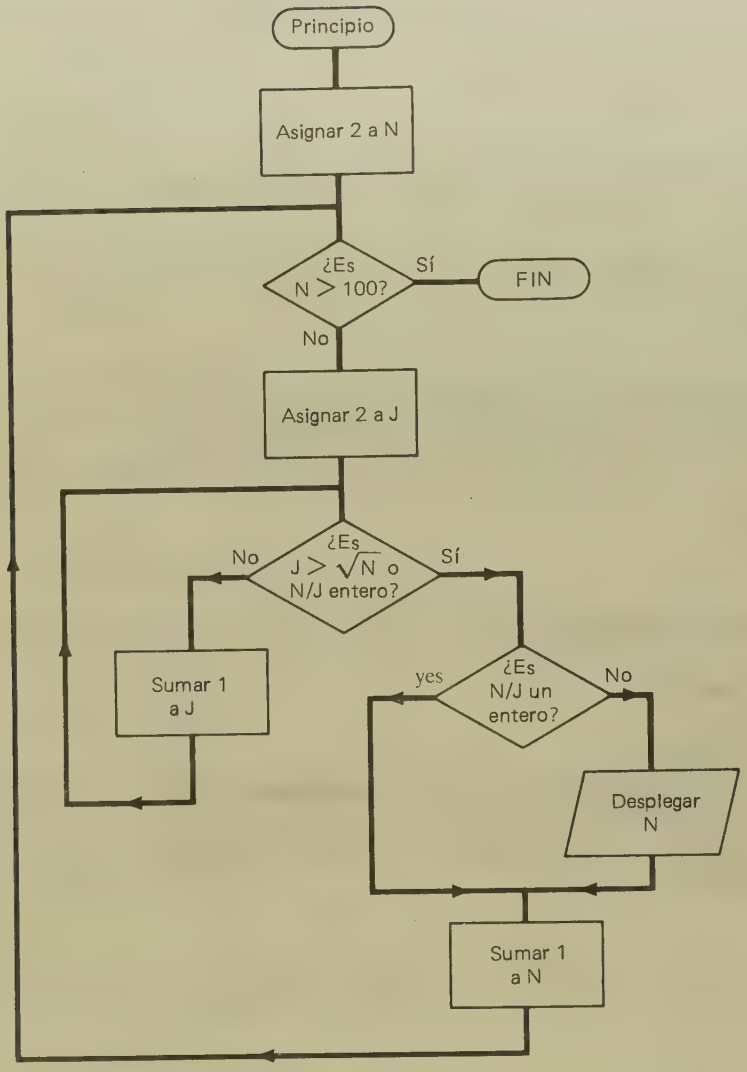
    (a) $2(4 + 6) = 2(4) + 2(6)$.
    (b) $5(1) = 5$.
    (c) $4(1/4) = 1$.

Evaluar las expresiones siguientes utilizando la aritmética de los números reales; evaluar después las mismas expresiones utilizando la aritmética de enteros.

36. $2(2/9) + 5/9$.
37. $2/3(3/4) + 1/2$.

Evaluar las expresiones siguientes.

38. $(3 \times 2 + 5)$ MOD 6.
39. $3(2 + 5)$ MOD 7.
40. $[2(3) + 4(4)]$ MOD 5.
⇒41. El diagrama de flujo siguiente muestra un algoritmo que genera números primos menores que 100. Modificarlo para encontrar parejas de "primos gemelos" (es decir, números primos que difieran por 2).


Principio
Asignar 2 a N
¿Es N > 100?
Sí
FIN
No
Asignar 2 a J
¿Es J > √N o N/J entero?
No
Sí
Sumar 1 a J
¿Es N/J un entero?
yes
No
Desplegar N
Sumar 1 a N

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Cooper, Curtis. "An Application of a Generalized Fibonacci Sequence," en *The College Mathematics Journal,* Vol. 15 No. 2 (Marzo de 1984), 145-157. (Se usa una sucesión de Fibonacci para resolver un problema del lanzamiento de una moneda.)

DeSanto, Carmine. "A Classroom Note on Venn diagrams for Four and Five Sets," en *Mathematics and Computer Education*, Vol. 18 No. 2 (Primavera de 1984), 107-110. (Se muestran diagramas de Venn para 4 y 5 conjuntos.)

Kung, Mou-Liang, y George C. Harrison. "Is the Venn diagram good enough?" en *The Coollege Mathematics Journal*, Vol. 15 No. 1 (Enero de 1984), 48-50. (Se demuestra que no es posible usar círculos para construir un diagrama de Venn general para 4 conjuntos.)

Leavitt. W. G. "Repeating Decimals," en *The College Mathematics Journal*, Vol. 15 No. 4 (Septiembre de 1984), 299-308.

Biografía — Pitágoras

Pitágoras nació en la isla griega de Samos alrededor de 570 a.C. Probablemente viajó a Egipto e India, donde adquirió el misticismo que influyó su filosofía. Cuando volvió a Samos, la isla estaba gobernada por el tirano Polícrates, por lo que se mudó a Crotona en la parte sur de Italia. Ahí fundó una escuela para estudiar matemáticas, filosofía, música y astronomía.

La mayoría de sus estudiantes pertenecían a la clase alta, pero personas de todas clases sociales asistían a sus disertaciones. También llegaban a escucharlo mujeres, violando la ley que prohibía su asistencia a reuniones públicas. Entre ellas se encontraba una joven de nombre Theano, quien, a pesar de la diferencia de edades, contrajo matrimonio con Pitágoras.

Un grupo de estudiantes de élite, llamados los pitagóricos, formó una cofradía con ritos y símbolos secretos. No comían carne ni granos, y consideraban su deber mantener sus descubrimientos fuera del alcance del público. No dejaron registros escritos y acreditaron sus descubrimientos al fundador de la escuela, por lo que es imposible saber con precisión cuáles fueron las contribuciones a las matemáticas que realizó el propio Pitágoras. Los antiguos babilonios ya conocían el teorema de Pitágoras, pero se considera que fueron los pitagóricos quienes lo demostraron por vez primera. Asimismo, éstos establecieron que existen números que no pueden expresarse como cocientes indicados de dos enteros. Existe la leyenda de que un pitagórico de nombre Hipaso reveló este secreto. La secta consideró su muerte, al caer por la borda de un barco (accidental o intencional), un justo castigo.

Los pitagóricos adquirieron poder político, y fuerzas que se oponían a su aristocratismo desmembraron la cofradía. Pitágoras y Theano partieron al exilio y él murió cuando tenía aproximadamente 75 años de edad, quizá asesinado por sus enemigos.

3

Lógica y álgebra booleana

Un microprocesador es un circuito integrado fabricado en una pieza de silicio cuadrada que mide menos de 5 mm de lado y 0.5 mm de espesor. Contiene la mayoría de los componentes necesarios para interpretar las instrucciones y para efectuar las operaciones de un programa de computadora. La lógica implícita es similar a la lógica matemática.

3.1. LÓGICA SIMBÓLICA

Las matemáticas y la programación de computadoras dependen de la claridad de los razonamientos. El lenguaje es a tal punto complejo que, en ocasiones, es difícil seguir los razonamientos. La lógica permite estudiar los métodos para distinguir los razonamientos correctos de los incorrectos.

Definición

Una *proposición* es un enunciado asertivo que es verdadero o falso, pero no ambos.

Los enunciados siguientes son proposiciones:

Dos más tres es igual a cinco.	(verdadero)
Cuatro es menor que cuatro.	(falso)
Tres es raíz cuadrada de nueve.	(verdadero)

Los enunciados siguientes no son proposiciones:

Cuatro más cinco.	(no es un enunciado)
¿Tres es igual a uno?	(no es afirmativo)

Esta afirmación es falsa. (si la afirmación es verdadera, entonces debe ser falsa; si es falsa, entonces debe ser verdadera)

A la proposición que expresa un solo pensamiento afirmativo se le llama *proposición simple.* Cuando se usan las partículas "y" u "o" para unir dos proposiciones o más, se les llama *conectivos lógicos.* Aun cuando la palabra "no" no une dos pensamientos, por lo general se clasifica entre los conectivos lógicos. Un enunciado que incluye un conectivo lógico se denomina *proposición compuesta.* Las *componentes* de una proposición compuesta son las proposiciones que la integran.

En la lógica simbólica se emplean, como lo indica su nombre, símbolos para poder examinar la *estructura* de las proposiciones independientemente del significado de las palabras. Se acostumbra usar letras minúsculas para representar las proposiciones simples. Para escribir simbólicamente una proposición compuesta se utiliza una letra para cada una de las proposiciones simples y los símbolos correspondientes para los conectivos lógicos.

Un enunciado de la forma p y q se llama *conjunción.* Un enunciado de la forma p o q se llama *disyunción.* Un enunciado de la forma no p se llama *negación.*

Conectivos lógicos

Conjunción $\wedge$ significa "y"
Disyunción $\vee$ significa "o"
Negación $\sim$ significa "no"

Considérese la proposición "x es un número racional y x es menor que cuatro". Se hace que r represente la proposición "x es un número racional", y se hace que f represente la proposición "x es menor que cuatro". Entonces, $r \wedge f$ representará la conjunción.

Ejemplo 1

Escribir como proposición en forma simbólica: "x es un entero negativo o x es un número racional positivo".

Solución

n: x es un entero negativo.
p: x es un número racional positivo.
"*x es un entero negativo* o *x es un número racional positivo*" se escribe $n \vee p$.

Las letras que se usan en lógica simbólica suelen ser p, q y r. Pero también pueden elegirse de tal modo que recuerden la proposición en sí. En el ejemplo 1 se usó la letra n de *n*egativo y la p de *p*ositivo.

Es conveniente hacer que la letra represente una proposición en su forma afirmativa. Por ejemplo, si se quiere decir "x no es igual a cinco", se hace que p represente "x es igual a cinco" y se usa $\sim p$ para representar "x *no* es igual a cinco";

Ejemplo 2

Escribir como proposición en forma simbólica: "Hay dos soluciones, y no son racionales".

Solución

t: hay dos soluciones.
r: son racionales.
"*Hay dos soluciones, y no son racionales*" se escribe $t \wedge \sim r$.

La transposición de enunciados en lenguaje común a la forma simbólica requiere especial atención. No siempre es posible tratar un enunciado asertivo como una proposición sin realizar ciertas modificaciones. Es necesario comprender la *intención* del enunciado. Por ejemplo, la palabra "y" no se enuncia en todos los casos. Considérese la proposición: "dos es un número natural, entero y racional". Este enunciado significa en realidad $n \wedge i \wedge r$, donde n, i y r representan las proposiciones:

n: dos es un número natural.
i: dos es un número entero.
r: dos es un número racional.

La palabra "pero" puede ser equivalente a "y", como en el enunciado "x es mayor que dos, pero x es menor que cinco". Esta proposición se escribe $t \wedge f$, donde se tienen las proposiciones:

t: x es mayor que dos (o $x > 2$).
f: x es menor que cinco (o $x < 5$).

Es posible expresar la misma proposición mediante enunciados diferentes. Considérense los dos enunciados: 1. Muchas personas dicen que Ada Lovelace fue la primera programadora de computadoras. 2. Con frecuencia se cita a Ada Lovelace como la primera programadora de computadoras. Los *enunciados* son diferentes, pero podrían representarse por la misma letra porque la *proposición* es la misma.

Enunciados escritos en tiempos verbales diferentes suelen expresar la misma proposición. Por ejemplo, supóngase que el servicio meteo-

rológico local anuncia, "El martes será calurosos y húmedo". El martes uno puede decir, "Es caluroso, pero no húmedo". Los enunciados "Será caluroso" y "Es caluroso" se presentarían por la misma letra en lógica simbólica, debido a que ambas se refieren a la temperatura local del martes. Es decir, expresan la misma *proposición*, aun cuando los *enunciados* sean diferentes.

Una complicación más es que el mismo enunciado puede expresar dos proposiciones distintas. Por ejemplo, considérense los enunciados: 1. En 1642, Pascal emprendió la construcción de una máquina calculadora, y tuvo éxito. 2. Más tarde, Leibniz emprendió la construcción de una máquina calculadora, y tuvo éxito. La frase "tuvo éxito" significa que Pascal coronó sus esfuerzos en el primer enunciado, pero significa que Leibniz coronó sus esfuerzos en el segundo. El *enunciado* simple "tuvo éxito" es el mismo, pero las *proposiciones* son diferentes y requerirían letras distintas.

En lógica simbólica es necesario el uso de paréntesis. Una coma en un enunciado en lenguaje común con frecuencia ayuda a colocar los paréntesis.

Ejemplo 3

Escribir como proposición en forma simbólica: "x es un entero negativo, o es un entero mayor que tres y es un cuadrado perfecto".

Solución

n: x es un entero negativo.
t: x es un entero mayor que tres.
s: x es un cuadrado perfecto.

La proposición se escribe $n \vee (t \wedge s)$.

Ejemplo 4

Escribir como proposición en forma simbólica: "x es un entero negativo o es un entero mayor que tres, y es un cuadrado perfecto".

Solución

n: x es un entero negativo.
t: x es un entero mayor que tres.
s: x es un cuadrado perfecto.

La proposición es $(n \vee t) \wedge s$.

La única diferencia entre las proposiciones de los ejemplos 3 y 4 es la colocación de la coma y, sin embargo, el significado es muy diferente. En ejemplo 3, $x \in \{..., -3, -2, -1\}$ o $x \in \{4, 9, 16, 25, ...\}$. Es decir, x pertenece a la unión de los dos conjutnos, de modo que $x \in$

$\{..., -3, -2, -1, 4, 9, 16, 25, ...\}$, En el ejemplo 4, $x \in \{..., -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$ y $x \in \{4, 9, 16, 25, ...\}$. Es decir, x pertenece a la intersección de los dos conjuntos, de modo que $x \in \{4, 9, 16, 25, ...\}$.

Las palabras "no... ni" se usan en ocasiones para expresar la negación de una disyunción exclusiva.

Ejemplo 5

Escribir como proposición en forma simbólica: "cero no es positivo ni negativo".

Solución

p: cero es positivo.
n: cero es negativo.

Al emplearse la partícula "ni" se dice que "tampoco es". Es decir, se tiene $\sim(p \vee n)$.

Ejemplo 6

Escribir como proposición en forma simbólica: "Siete no es menor que cinco ni mayor que diez".

Solución

l: siete es menor que cinco.
g: siete es mayor que diez.

Entonces, $\sim(l \vee g)$.

Ejercicios

Escribir la forma simbólica de los enunciados siguientes (relativos a un programa de estudios de procesamiento de datos) utilizando las letras indicadas. Ver los ejemplos 1 al 6.

c: Juan cursa COBOL.
b: Juan cursa BASIC.
p: Juan cursa Pascal.
f: Juan cursa FORTRAN.

1. Juan debe cursar COBOL o FORTRAN.
2. Juan puede cursar BASIC y Pascal.
3. Juan puede cursar COBOL y FORTRAN.
4. Juan debe cursar COBOL, y BASIC o Pascal.
5. Juan debe cursar COBOL y BASIC, o Pascal.
6. Juan puede no cursar BASIC o Pascal.

Los problemas 7 al 23 son casos típicos de enunciados compuestos que pueden incorporarse en programas de computadora para diferentes negocios.

Escribir la forma simbólica de los enunciados siguientes (relativos al solicitante de un seguro de automóvil) utilizando las letras indicadas. Ver los ejemplos 1 al 6.

a: El solicitante tiene 25 años o más.
m: El solicitante es hombre.
v: El solicitante ha tenido una infracción de tránsito en los tres años anteriores.
t: El solicitante asegurará dos automóviles o más.

7. El solicitante es mujer y tiene más de 25 años.
8. El solicitante no ha sido infraccionado o asegurará dos automóviles o más.
9. El solicitante es hombre y tiene más de 25 años, y no ha sido infraccionado en los tres años anteriores.
10. El solicitante es mujer y asegurará dos automóviles o más, y tiene 25 años o más.
11. El solicitante es mujer y tiene 25 años o más, pero tiene asegurado sólo un automóvil.
12. El solicitante no es hombre ni tiene 25 años o más.

Escribir la forma simbólica de los enunciados siguientes (relativos al inventario de un comercio) utilizando las letras indicadas. Ver los ejemplos 1 al 6.

s: El artículo está en existencia.
o: El artículo está agotado.
r: El artículo está pedido.
d: El artículo está descontinuado.

13. El artículo está agotado, pero ya se pidió.
14. El artículo se ha descontinuado o está agotado.
15. El artículo está agotado y se ha pedido, pero está descontinuado.
16. El artículo está en existencia o agotado, pero no se ha descontinuado.
17. El artículo está en existencia, o está agotado y se ha descontinuado.
18. El artículo no está agotado ni descontinuado.

Escribir la forma simbólica de los enunciados siguientes (relativos a las reservaciones de una línea aérea) utilizando las letras indicadas. Ver los ejemplos 1 al 6.

w: El pasajero quiere un asiento de ventanilla.
f El pasajero quiere la sección de primera clase.
s: El pasajero quiere la sección de fumadores.
a: El pasajero viajará solo.
r: El pasajero quiere un boleto de ida y vuelta.

19. El pasajero viajará solo y quiere un boleto de ida y vuelta.
20. El pasajero quiere un asiento de ventanilla o en la sección de fumadores.

21. El pasajero quiere la sección de primera clase, pero no un asiento de ventanilla ni la sección de fumadores.
22. El pasajero quiere un asiento de ventanilla o la sección de fumadores, pero no en la sección de primera clase.
23. El pasajero no quiere un asiento de ventanilla ni la sección de fumadores.

Escribir la forma simbólica de los enunciados siguientes utilizando las letras indicadas. Ver los ejemplos 1 al 6.

t: $x > -2$
f: $x < 5$
z: $x = 0$

24. $x > -2$ y $x < 5$
25. $x > -2$ pero $x \neq 0$
26. $x > -2$ o $x = 0$
27. $x < 5$ o $x \neq 0$
28. $x > -2$ y $x < 5$, pero $x \neq 0$
29. $x < 5$ y $x \neq 0$
30. $x \leqslant -2$ o $x \geqslant 5$

*31. Ana, Guillermo y Carlos comen en la hora del refrigerio. Uno de ellos tiene una manzana, otro tiene un plátano y el último tiene una zanahoria. Ana no tiene el plátano ni la zanahoria. Guillermo no tiene el plátano. Carlos no tiene la manzana y tampoco la zanahoria. ¿Qué tiene cada quién?
*32. Cuatro programadores, Álvarez, Bellowski, Chin y Dodd, saben un lenguaje de computadora cada uno. Álvarez no sabe Pascal y tampoco BASIC. Bellowski sabe BASIC o FORTRAN. Álvarez sabe COBOL o Chin no sabe Pascal. Dodd sabe COBOL o FORTRAN. Chin no sabe BASIC ni COBOL. ¿Qué lenguaje sabe cada programador?
*33. Cuatro estudiantes, Juan, Carlos, Lee y María, tienen una computadora en casa. Las computadoras son una Apple, una Commodore, una IBM y una TRS-80. Juan juega softbol con los dueños de la Apple y la Commodore. Carlos consiguió interesar en la programación a los dueños de la IBM y de la Commodore. Lee vendió la Apple a su dueño actual, y María ha salido con el dueño de la Apple y con el dueño de la Commodore. Carlos tiene la IBM o Juan no tiene la IBM. ¿Qué computadora tiene cada estudiante?

3.2. TABLAS DE VERDAD

En 1854, el matemático autodidacta George Boole, nacido en Inglaterra, publicó un libro titulado *Investigación de las leyes del pensamiento*. En este libro Boole explicaba que existe relación entre conjuntos y lógica.

Recuérdese del capítulo 2 que

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$,
$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$, donde "o" se usa en sentido inclusivo, y
$A' = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$.

Es decir, $x \in A \cap B$ si x pertenece a *ambos* conjuntos A y B.
$x \in A \cup B$ si x pertenece *al menos a uno* de los conjuntos A o B.
$x \in A'$ si x *no* pertenece a A.

Valores de verdad de proposiciones compuestas

$p \wedge q$ es verdadera si *ambas* proposiciones p y q son verdaderas.
$p \vee q$ es verdadera si *al menos una* de las proposiciones p o q es verdadera.
$\sim p$ es verdadera si p *no* es verdadera.

Ejemplo 1

Considérense las cuatro proposiciones compuestas siguientes y determinar si son verdaderas o falsas.

(a) El caramelo es dulce y las papas fritas son saladas.
(b) El caramelo es dulce y las papas fritas son amargas.
(c) El caramelo es amargo y las papas fritas son saladas.
(d) El caramelo es amargo y las papas fritas son amargas.

Solución

(a) Verdadera, porque ambas componentes son verdaderas.
(b) Falsa, porque la primera componente es verdadera y la segunda es falsa.
(c) Falsa, porque la primera componente es falsa y la segunda es verdadera.
(d) Falsa, porque ambas componentes son falsas.

Si una proposición es verdadera, se dice que su *valor de verdad* es "verdadero". Si es falsa, su valor de verdad es "falso". El que una proposición compuesta sea verdadera o falsa depende de los valores de verdad de las componentes. Como consecuencia, es posible examinar la estructura de una proposición compuesta independientemente del significado del enunciado.

Ejemplo 2

Considérense los cuatro enunciados compuestos siguientes, los cuales tienen la misma estructura que los cuatro del ejemplo 1. Determinar si son verdaderos o falsos.

(a) Cinco es menor que siete y siete es mayor que nueve.
(b) Cinco es menor que siete y nueve es mayor que diez.
(c) Tres es mayor que cuatro y siete es menor que nueve.
(d) Tres es mayor que cuatro y nueve es mayor que diez.

Solución

(a) Verdadera, porque ambas componentes son verdaderas.
(b) Falsa, porque la primera componente es verdadera y la segunda es falsa.
(c) Falsa, porque la primera componente es falsa y la segunda es verdadera.
(d) Falsa, porque ambas componentes son falsas.

Hay cuatro combinaciones posibles de los valores de verdad para las dos componentes de una conjunción. Éstas se enlistan en un cuadro, llamado *tabla de verdad*.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 3

Considérense las disyunciones siguientes y determinar sus valores de verdad.

(a) Cinco es menor que siete o siete es menor que nueve.
(b) Cinco es menor que siete o nueve es mayor que diez.
(c) Tres es mayor que cuatro o siete es menor que nueve.
(d) Tres es mayor que cuatro o nueve es mayor que diez.

Solución

(a) Verdadera, porque ambas componentes son verdaderas.
(b) Verdadera, porque la primera componente es verdadera.
(c) Verdadera, porque la segunda componente es verdadera.
(d) Falsa, porque ninguna de las componentes es verdadera.

A continuación se presenta la tabla de verdad de la disyunción.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Puesto que la negación se aplica a una sola proposición, su tabla de verdad consta únicamente de dos renglones. Éstos se muestran en la tabla de verdad siguiente.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Las tres tablas de verdad que se han visto constituyen los "cimientos" a partir de los cuales se construyen las tablas de verdad de las proposiciones compuestas. Considérese $\sim p \vee q$. El valor de verdad de la proposición compuesta depende de los valores de verdad de p y q. Se enlistan las cuatro combinaciones posibles de los valores de verdad de p y q.

p	q	$\sim p \vee q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Se numeran estas dos columnas con "1" y "2". Abajo del símbolo $\sim$ se enlistan los valores de verdad de $\sim p$. Éstos son los contrarios de los valores de verdad correspondientes a p. Esta columna se numera "3". Abajo de q se enlistan sus valores de verdad y la columna se numera "4". Por último, abajo del símbolo $\vee$ se enlistan los valores de verdad de la disyunción utilizando los valores de las columnas 3 y 4, que representan los valores de verdad de las proposiciones $\sim p$ y q, respectivamente.

p	q	$\sim p \vee q$
V	V	F V V
V	F	F F F
F	V	V V V
F	F	V V F
1	2	3 5 4

Para construir la tabla de verdad de una proposición compuesta con dos letras:

1. Se anotan las letras empleadas y la proposición compuesta como cabezas de columna.

2. Se enlistan todas las combinaciones posibles de los valores de verdad.
   a. Abajo de la primera letra se enlistan dos V seguidas de dos F.*
   b. Abajo de la segunda letra se alternan V y F, empezando con V.
3. Se anota el valor de verdad de cada componente, y el de la proposición compuesta abajo del conectivo; y se numeran las columnas.
4. Los valores de verdad de la columna final (la que tiene el número mayor) corresponden a la proposición compuesta.

Ejemplo 4

Construir una tabla de verdad para $\sim(p \wedge q)$.

Solución

Se enlistan los valores de verdad posibles de p y q.

p	q	$\sim (p \wedge q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Los valores de verdad de $(p \wedge q)$ se conocen, de modo que se enlistan abajo del símbolo $\wedge$.

p	q	$\sim (p \wedge q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Por último, se conocen los valores de verdad de una negación. Abajo del símbolo $\sim$ se enlistan los valores de verdad contrarios a los de $(p \wedge q)$.

p	q	$\sim (p \wedge q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

* El orden en que se enlistan los valores de verdad posibles carece de importancia, pero es conveniente emplear un procedimiento sistemático, cuando las tablas de verdad se comparan. Las respuestas al final del libro presuponen este orden.

p	q	$\sim (p \wedge q)$
V	V	F V
V	F	V F
F	V	V F
F	F	V F
1	2	4 3

En ocasiones, la comprensión de un enunciado se facilita si se formula en otra forma. Sin embargo, si se desea sustituir una proposición compuesta con otra, es necesario verificar que sus valores de verdad son iguales para cualquier combinación de los valores de verdad de sus componentes.

Definición

Se dice que dos proposiciones son *lógicamente equivalentes* si tienen los mismos valores de verdad para cualquier combinación de los valores de verdad de las proposiciones simples que las integran. El símbolo de equivalencia lógica es $\equiv$.

Ejemplo 5

Demostrar que $\sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$.

Solución

En el ejemplo 4 se presentó la tabla de verdad de $\sim (p \wedge q)$. Se construye la tabla de verdad de $\sim p \vee \sim q$.

p	q	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F F F
V	F	F V V
F	V	V V F
F	F	V V V
1	2	3 5 4

Se concluye que $\sim (p \wedge q)$ es lógicamente equivalente a $\sim p \vee \sim q$, ya que los valores de verdad de la columna fina l son idénticos línea por línea.

El enunciado examinado en el ejemplo 5 se conoce como la ley de De Morgan. En el capítulo 2 se vieron las leyes de De Morgan para la teoría de conjuntos:

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ y $(A \cup B)' = A' \cap B'$. También se cumple que $\sim(p \vee q)$ es lógicamente equivalente a $\sim p \wedge \sim q$. Al verificar las tablas de verdad se comprueba que éste es el caso. Ver el problema 11.

Ejemplo 6

Usar la ley de De Morgan y el hecho de que $\sim (\sim p) \equiv p$ para reformular los enunciados siguientes.

(a) $\sim (\sim p \wedge q)$.
(b) $\sim (r \vee \sim s)$.

Solución

(a) $\sim (\sim p \wedge q) \equiv \sim (\sim p) \vee \sim q \equiv p \vee \sim q$
(b) $\sim (r \vee \sim s) \equiv \sim r \wedge \sim (\sim s) \equiv \sim r \wedge s$

A continuación se aplicará la idea de equivalencia lógica a enunciados en lenguaje común.

Ejemplo 7

Determinar si los dos enunciados son lógicamente equivalentes.

(a) Seis no es divisible entre 2 y entre 5.
(b) Seis no es divisible entre 2 o no es divisible entre 5.

Solución

t: seis es divisible entre 2.
f: seis es divisible entre 5.

(a) La primera proposición se escribe $\sim (t \wedge f)$.
(b) La segunda proposición se escribe $\sim t \vee \sim f$.

No es necesario construir las tablas de verdad, puesto que los dos enunciados son lógicamente equivalentes por la ley de De Morgan.

Ejemplo 8

Determinar si los dos enunciados son lógicamente equivalentes.

(a) El programador no sabe COBOL y FORTRAN.
(b) El programador no sabe COBOL ni FORTRAN.

Solución

c: El programador sabe COBOL.
f: El programador sabe FORTRAN.

(a) $\sim (c \wedge f)$.
(b) $\sim c \wedge \sim f$.

Se construyen las tablas de verdad.

c	f	$\sim (c \wedge f)$	
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F
1	2	4	3

c	f	$\sim c \wedge \sim f$		
V	V	F	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V
1	2	3	5	4

Al comparar los valores de verdad de $\sim (c \wedge f)$ de la columna 4 de la primera tabla con los dos de $\sim c \wedge \sim f$ de la columna 5 de la segunda tabla, se ve que las dos proposiciones no son lógicamente equivalentes.

Ejercicios

Construir la tabla de verdad de las proposiciones siguientes. Ver el ejemplo 4.

1. $r \wedge s$ **2.** $r \vee s$ **3.** $\sim r$
4. $\sim (p \vee q)$ **5.** $\sim p \wedge \sim q$ **6.** $\sim p \vee q$
7. $u \vee \sim w$ **8.** $\sim u \vee w$ **9.** $u > \wedge w$

10. Demostrar que $\sim (\sim p)$ es lógicamente equivalente a p. Ver el ejemplo 5.
11. Demostrar que $\sim p \wedge \sim q$ es lógicamente equivalente a $\sim (p \vee q)$. Ver el ejemplo 5.

En los ejemplos 12 al 20, usar las leyes de De Morgan para reformular las proposiciones. Ver el ejemplo 6.

12. $\sim (r \vee s)$ **13.** $\sim (r \wedge s)$ **14.** $\sim (p \wedge \sim q)$
15. $\sim (\sim p \vee q)$ **16.** $\sim (\sim p \wedge \sim q)$ **17.** $\sim (\sim r \vee \sim s)$
18. $\sim (u \vee \sim w)$ **19.** $\sim p \wedge \sim q$ **20.** $\sim p \vee \sim q$

Determinar si los enunciados son lógicamente equivalentes. Ver los ejemplos 7 y 8.

21. (a) El cliente no tiene cuenta de ahorros ni un saldo mínimo de $ 200.
    (b) El cliente no tiene cuenta de ahorros y no tiene un saldo mínimo de $ 200.
22. (a) El cliente no tiene un saldo mínimo de $ 200 y no tiene un saldo promedio diario de $ 500.
    (b) El cliente no tiene un saldo mínimo de $ 200 y un saldo promedio diario de $ 500.
23. (a) El cliente no tiene cuenta de ahorros o de cheques.
    (b) El cliente no tiene cuenta de ahorros o no tiene cuenta de cheques.
24. (a) El cliente no tiene cuenta de ahorros y de cheques.
    (b) El cliente no tiene cuenta de ahorros o no tiene cuenta de cheques.

Los acertijos lógicos siguientes se han repetido en diversas formas por muchos años.

*25. Supóngase que el lector se encuentra en una isla tropical donde los miembros de una tribu (a la que se llamará Tribu A) siempre dicen la verdad, mientras que los miembros de la otra tribu (a la que se llamará Tribu B) siempre mienten. El lector llega a la intersección de dos caminos y debe preguntar a un nativo cuál es el que tiene que tomar, pero no sabe a qué tribu pertenece el nativo. ¿Qué pregunta, cuya respuesta sea sí o no, debe formular el lector para determinar de inmediato cuál de los caminos debe tomar?

*26. El lector encuentra tres nativos (ver el problema 25 anterior). Pregunta al primero a qué tribu pertenece. No puede escuchar la respuesta, por lo que el segundo nativo dice: "Él dijo que es de la Tribu B". El tercero dice, "Uno de ellos es de la Tribu A". ¿A qué Tribu pertenece cada uno de ellos?

⇒27. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo para ilustrar un algoritmo que acepte una lista de números como entrada y que cuente los valores que no sean mayores que cinco ni menores que dos.

3.3. PROPOSICIONES COMPUESTAS

A fin de evitar ambigüedades en una proposición compuesta, se sigue el orden establecido para los conectivos. Las expresiones dentro de paréntesis tienen prioridad respecto de las expresiones restantes. Los paréntesis pueden usarse para fines de claridad, aun cuando no sean necesarios. En ausencia de paréntesis, o en las expresiones que aparecen entre paréntesis, las negaciones se efectúan primero, seguidas de las conjunciones y, luego, de las disyunciones. Si en una expresión se repite un conectivo, éstos se consideran de izquierda a derecha.

Orden de los conectivos

1. Se determina primero el valor de verdad de las expresiones entre paréntesis. Dentro de éstos, los conectivos se consideran en el orden siguiente:
2. Negaciones (de izquierda a derecha).
3. Conjunciones (de izquierda a derecha).
4. Disyunciones (de izquierda a derecha).

Ejemplo 1

Colocar paréntesis en las expresiones siguientes para indicar el orden correcto de los conectivos.

(a) $q \vee r \wedge p$
(b) $\sim p \wedge q \vee r$
(c) $p \wedge q \vee \sim r$
(d) $p \wedge q \wedge r$

Solución

(a) $q \vee (r \wedge p)$
(b) $(\sim p) \wedge q) \vee r$
(c) $(p \wedge q) \vee (\sim r)$
(d) $(p \wedge q) \wedge r$

Para construir la tabla de verdad de una proposición formada con tres proposiciones simples es necesario considerar ocho posibilidades.

Como ejemplo se examina $(p \wedge q) \vee \sim r$.

A fin de considerar las ocho posibilidades, se necesita ser sistemático. Abajo de p se enlistan cuatro V seguidas de cuatro F. Abajo de q se enlistan dos V y dos F de manera alternada. Abajo de r se enlistan V y F alternadamente. Las columnas anteriores se numeran del 1 al 3, respectivamente.

Los paréntesis de $(p \wedge q)$ indican que esta expresión tiene prioridad. Se examinan los valores de verdad individuales de p y q para determinar los valores de verdad de $(p \wedge q)$ en cada renglón y llevar la columna 4 abajo del símbolo $\wedge$.

Abajo del símbolo $\sim$ de la columna 5 se enlistan los valores de verdad de $\sim r$. Por último, en la columna 6, abajo del símbolo $\vee$, se enlistan los valores de verdad de la disyunción, utilizando los valores pertenecientes a las columnas 4 y 5 como valores de verdad de las componentes.

p	q	r	$(p \wedge q) \vee \sim r$
V	V	V	V **V** F
V	V	F	V **V** V
V	F	V	F **F** F
V	F	F	F **V** V
F	V	V	F **F** F
F	V	F	F **V** V
F	F	V	F **F** F
F	F	F	F **V** V
1	2	3	4 6 5

El procedimiento puede generalizarse como un algoritmo.

Para construir la tabla de verdad de una proposición formada con tres letras:

1. Se enlistan las letras y la proposición compuesta como cabezas de columnas.
2. Se enlistan las ocho combinaciones posibles de los valores de verdad.
   a. Se enlistan cuatro V seguidas de cuatro F en la primera columna.
   b. Se enlistan dos V y dos F de manera alternada en la segunda columna.
   c. Se enlistan V y F alternadas en la tercera columna.
3. Siguiendo el orden convencional de los conectivos, se enlista el valor de verdad de cada proposición compuesta abajo de su conectivo y se numera la columna.
4. Los valores de verdad enlistados en la columna final (la que tiene el número mayor) son los valores de verdad de la proposición compuesta.

Ejemplo 2

Construir la tabla de verdad de $p > (q > \sim r)$.

Solución

p	q	r	$p \wedge (q \vee \sim r)$
V	V	V	V V V V F
V	V	F	V V V V V
V	F	V	V F F F F
V	F	F	V V F V V
F	V	V	F F V V F
F	V	F	F F V V V
F	F	V	F F F F F
F	F	F	F F F V V
1	2	3	7 8 5 6 4

4 — $\sim r$ tiene los valores de verdad contrarios a los de r.

6 — valores de verdad de la disyunción, columnas 4 y 5.

8 — valores de verdad de la conjunción, columnas 6 y 7.

Para decidir si dos proposiciones son lógicamente equivalentes, se examinan sus tablas de verdad. Si sus valores de verdad son iguales en la columna final (la que tiene el número mayor), son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 3

Determinar si $(p \wedge q) \vee \sim r$ es lógicamente equivalente a $p \wedge (q \vee \sim r)$.

Solución

La tabla de verdad de $(p \wedge q) \vee \sim r$ se acaba de presentar en el ejemplo 3 anterior. La tabla de verdad de $p \wedge (q \vee \sim r)$ se vio en el ejemplo 2. Las columnas finales (la 6 en la primera y la 8 en la segunda) difieren en los renglones sexto y octavo de las tablas de verdad, por lo que las proposiciones no son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 4

Determinar si $(p \wedge q) \vee r$ es lógicamente equivalente a $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$.

Solución

Las tablas de verdad correspondientes son:

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$
V	V	V	V **V** V
V	V	F	V **V** F
V	F	V	F **V** V
V	F	F	F **F** F
F	V	V	F **V** V
F	V	F	F **F** F
F	F	V	F **V** V
F	F	F	F **F** F
1	2	3	4 6 5

p	q	r	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V **V** V
V	V	F	V **V** V
V	F	V	V **V** V
V	F	F	V **F** F
F	V	V	V **V** V
F	V	F	F **F** V
F	F	V	V **V** V
F	F	F	F **F** F
1	2	3	4 6 5

Puesto que las columnas finales (la 6 en ambas) son idénticas en las dos tablas, las dos proposiciones son lógicamente equivalentes.

En ocasiones, una proposición será verdadera para cualquier combinación posible de los valores de verdad.

Definición

Una *tautología* es un proposición que es verdadera para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Ejemplo 5

Determinar si la proposición $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$ es una tautología.

Solución

Se construye la tabla de verdad.

p	q	$(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$
V	V	V **V** F F F
V	F	F **V** F V V
F	V	F **V** V V F
F	F	F **V** V V V
1	2	3 7 4 6 5

Se llega a la conclusión de que la proposición es una tautología porque es verdadera en todos los renglones de la tabla de verdad. Ver la columna 7.

Ejercicios

Colocar paréntesis en las expresiones siguientes para indicar el orden correcto de los conectivos. Ver el ejemplo 1.

1. $p \wedge \sim q \vee r$
2. $\sim p \vee q \wedge \sim r$
3. $p \vee \sim q \wedge r$
4. $p \vee \sim q \vee r$
5. $\sim p \wedge q \wedge \sim r$
6. $\sim p \vee \sim q \wedge r$
7. $p \wedge q \vee r \wedge s$
8. $p \vee q \wedge r \vee s$
9. $\sim p \vee q \vee r \wedge \sim s$
10. $\sim p \wedge q \wedge r \vee \sim s$
11. $p \wedge \sim q \wedge r \vee \sim s$
12. $p \vee \sim q \vee r \wedge S$

Construir la tabla de verdad de las proposiciones siguientes. Ver el ejemplo 2.

13. $(p \vee \sim q) \vee r$
14. $p \wedge (\sim q \vee r)$
15. $p \vee (\sim q \wedge r)$
16. $(p \vee \sim q) \wedge r$
17. $\sim (p \wedge q) \vee r$
18. $\sim p \vee (\sim q \vee r)$
19. $\sim (p \vee q) \wedge r$
20. $\sim p \wedge (\sim q \wedge r)$
21. $\sim [p \wedge (q \vee r)]$
22. $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$

Los problemas 23 al 27 se refieren a los problemas 13 al 22 anteriores. Para cada par de proposiciones, determinar si son lógicamente equivalentes. Véanse los ejemplos 3 y 4.

23. ¿Son lógicamente equivalentes las proposiciones de los problemas 13 y 14?
24. ¿Son lógicamente equivalentes las proposiciones de los problemas 15 y 16?
25. ¿Son lógicamente equivalentes las proposiciones de los problemas 17 y 18?
26. ¿Son lógicamente equivalentes las proposiciones de los problemas 19 y 20?
27. ¿Son lógicamente equivalentes las proposiciones de los problemas 21 y 22?

Determinar si las proposiciones siguientes son tautológicas. Ver el ejemplo 5.

28. $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$.
29. $(g \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.
30. $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p)$.
*31. ¿Cuántos renglones serían necesarios en la tabla de verdad de una proposición compuesta con n letras?

3.4. LA CONDICIONAL

Una proposición de la forma "si p entonces q" se llama *condicional*. "Si ... entonces" es el conectivo lógico. La proposición p se denomina el *antecedente* y q se denomina el *consecuente*.

Conectivo lógico

Condicional: $\rightarrow$ significa "si ... entonces"

Sea z "el divisor es cero" y d "la división está definida". El enunciado "Si el divisor es cero, entonces la división no está definida" se escribe en forma simbólica como $z \rightarrow \sim d$.

Ejemplo 1

Escribir en forma simbólica:

(a) Si los factores tienen el mismo signo, entonces el producto es positivo.
(b) Si los factores no tienen el mismo signo, entonces el producto no es positivo.

Solución

s: los factores tienen el mismo signo.
p: el producto es positivo.

(a) $s \rightarrow p$.
(b) $\sim s \rightarrow \sim p$.

La palabra "entonces" puede omitirse en la condicional. "Si p, q" significa "si p, entonces q". También es posible escribir "q si p". Es importante darse cuenta de que p sigue siendo el antecedente (ya que está después de "si") y q el consecuente.

Ejemplo 2

Escribir en forma simbólica:

(a) Si llueve, la ceremonia de graduación se efectuará en el auditorio.
(b) La ceremonia de graduación se efectuará en el auditorio si llueve.

Solución

r: llueve.
a: la ceremonia de graduación se efectuará en el auditorio.

(a) "llueve" está después de "si", de modo que es el antecedente: $r \rightarrow a$.
(b) "llueve" está después de "si", de modo que es el antecedente: $r \rightarrow a$.

Muchos enunciados pueden estar formulados en la forma condicional aun cuando no incluyan el conectivo "si ... entonces". Por ejemplo, el enunciado "Donde hay humo, hay fuego" podría escribirse "Si hay humo, entonces hay fuego".

La frase "sólo si" suele interpretarse erróneamente. "El programa funcionará sólo si la computadora está conectada" dice que si el programa funciona, entonces la computadora está conectada. *No* dice que si la computadora está conectada, el programa funcionará. La componente que está después de "sólo si" es el consecuente. El enunciado "sólo los buenos mueren jóvenes" podría escribirse "Sólo si una persona es buena morirá joven" y, por tanto, transmite el pensamiento "si una persona muere joven, entonces es buena".

Formas alternativas de la condicional

Si p, entonces q
Si p, q
p sólo si q
q si p
q siempre que p

Ejemplo 3

Escribir en forma simbólica:

(a) Se puede tener acceso al programa si se conoce la contraseña.
(b) Se puede tener acceso al programa sólo si se conoce la contraseña.

Solución

l: se puede tener acceso al programa.
p: se conoce la contraseña.

(a) "Se conoce la contraseña" está después de "si", de modo que es el antecedente: $p \rightarrow l$.
(b) "Se conoce la contraseña" está después de "sólo si", de modo que es el consecuente: $l \rightarrow p$.

Ejemplo 4

Escribir en forma simbólica:

(a) Se perderá el contenido de la memoria siempre que se interrumpa la energía eléctrica.
(b) Se perderá el contenido de la memoria sólo si se interrumpe la energía eléctrica.

Solución

m: se perderá el contenido de la memoria.
p: se interrumpe la energía eléctrica.

(a) "Siempre que" significa "si", de modo que "se interrumpe la energía eléctrica" es el antecedente: $p \rightarrow m$.
(b) "Se interrumpe la energía eléctrica" está después de "sólo si", de modo que es el consecuente: $m \rightarrow p$.

En ausencia de paréntesis, la negación, la conjunción y la disyunción se consideran antes que la condicional. Así, $s \rightarrow p \vee q$ significa $s \rightarrow (p \vee q)$ y no $(s \rightarrow p) \vee q$.

Orden de los conectivos

1. Se determina primero el valor de verdad de las expresiones entre paréntesis. Dentro de éstos, los conectivos se consideran en el orden siguiente:
2. Negaciones (de izquierda a derecha).
3. Conjunciones (de izquierda a derecha).
4. Disyunciones (de izquierda a derecha).
5. Condicionales (de izquierda a derecha).

Ejemplo 5

Colocar paréntesis en las expresiones siguientes para indicar el orden correcto.

(a) $p \wedge q \rightarrow r \vee s$
(b) $\sim p \rightarrow q$

Solución

(a) $p \wedge q \rightarrow r \vee s$ significa $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
(b) $\sim p \rightarrow q$ significa $(\sim p) \rightarrow q$

Si las componentes de $p \rightarrow q$ se intercambian, a la proposición $q \rightarrow p$ se le llama la *recíproca* de $p \rightarrow q$. Si se hace la negación de las componentes de $p \rightarrow q$, a la proposición $\sim p \rightarrow \sim q$ se denomina la *inversa* de $p \rightarrow q$. Si las componentes de $p \rightarrow q$ se intercambian y se niegan a la vez, la proposición $\sim q \rightarrow \sim p$ se denomina la *contrapuesta* de $p \rightarrow q$.

A la proposición $\sim(p \rightarrow q)$ se le llama la *negación* de la proposición $p \rightarrow q$. Con frecuencia, la negación de una proposición $p \rightarrow q$ se indica empezando la proposición $p \rightarrow q$ con la frase "No ocurre que".

Ejemplo 6

Considérese la proposición "Si se puede aprender Pascal, entonces se puede aprender BASIC". Escribir la

(a) recíproca.
(b) inversa.
(c) contrapuesta.
(d) negación.

Solución

Sea p = se puede aprender Pascal.
Sea b = se puede aprender BASIC.

(a) recíproca: Si se puede aprender BASIC, entonces se puede aprender Pascal.
(b) inversa: Si no se puede aprender Pascal, entonces no se puede aprender BASIC.
(c) contrapuesta: Si no se puede aprender BASIC, entonces no se puede aprender Pascal.
(d) negación: No ocurre que si se puede aprender Pascal, entonces pueda aprenderse BASIC.

Ejercicios

Escribir la forma simbólica de los enunciados siguientes utilizando las letras dadas. Ver los ejemplos 1 y 2.

f: el lector puede construir un diagrama de flujo.
p: el lector puede escribir un programa de computadora.

1. Si el lector puede construir un diagrama de flujo, entonces puede escribir un programa de computadora.
2. Si el lector puede escribir un programa de computadora, entonces puede construir un diagrama de flujo.

s: el programa del lector es estructurado.
e: el programa del lector puede seguirse con facilidad.

3. Si el programa del lector es estructurado, entonces puede seguirse con facilidad.
4. Si el programa del lector no es estructurado, entonces no podrá seguirse con facilidad.

l: la lógica del lector es clara.
e: el programa del lector es fácil de depurar de errores.

5. Si la lógica del lector es clara, entonces será fácil depurar los errores de su programa.
6. Si es fácil depurar los errores del programa del lector, entonces su lógica debe ser clara.

d: el lector documenta sus programas.
e: los programas del lector se podrán guardar fácilmente.

7. Si el lector documenta sus programas, éstos se podrán guardar fácilmente.
8. Si el lector no documenta sus programas, será difícil guardarlos.

h: el lector expone un disco flexible a calor excesivo.
m: el lector expone un disco flexible a un campo magnético.
d: el lector puede dañar su disco flexible.

9. Si el lector expone un disco flexible a calor excesivo o a un campo magnético, puede dañarlo.
10. Si el lector no expone un disco flexible a calor excesivo, no puede dañarlo.

d: el lector quiere dañar un disco flexible.
b: el lector dobla un disco flexible.
h: el lector lo toma en el sitio donde están los agujeros.

11. Si el lector no quiere dañar un disco flexible, no debe doblarlo o tomarlo en el sitio donde están los agujeros.
12. Si el lector dobla un disco flexible o lo toma en el sitio donde están los agujeros, debe querer dañarlo.

Escribir la forma simbólica de los enunciados siguientes. Ver los ejemplos 3 y 4.

13. Una persona puede escribir un programa de computadora sólo si puede construir un diagrama de flujo.
14. Un número es divisible entre seis sólo si es divisible entre dos y por tres.
15. Me duele sólo cuando me río.
16. Cuando llueve, diluvia.
17. Cuando no está el gato, los ratones juegan.
18. Camarón que se duerme, se lo lleva la corriente.
19. El flojo y mezquino, recorre dos veces el camino.
20. Un escritorio desordenado es señal de un genio.

Colocar paréntesis en las expresiones siguientes para indicar el orden correcto de los conectivos. Ver el ejemplo 5.

21. $p \vee \sim q \rightarrow r$
22. $p \vee q \rightarrow r$
23. $p \rightarrow q \wedge r$
24. $\sim p \rightarrow q \vee r$
25. $\sim p \wedge q \rightarrow r$
26. $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s$
27. $p \wedge r \rightarrow q \vee s$
28. $p \vee q \wedge s \rightarrow r$
29. $p \wedge q \vee s \rightarrow r$

Escribir la recíproca, la inversa, la contrapuesta y la negación de los enunciados siguientes. Ver el ejemplo 6.

30. Si el lector puede construir un diagrama de flujo, entonces puede escribir un programa de computadora.
31. Si el programa del lector es estructurado, entonces puede seguirse con facilidad.
32. Si la lógica del lector es clara, entonces será fácil depurar los errores de su programa.
33. Si el lector documenta sus programas, éstos serán fáciles de guardar.
34. Si el lector expone un disco flexible a calor excesivo, lo dañará.
35. Si el lector sabe la contraseña, puede tener acceso al programa.
36. Si hay interrupción de la energía eléctrica, entonces el lector perderá el contenido de la memoria.
*37. El acertijo lógico siguiente es muy conocido y se ha presentado en diversas formas.

Tres personas inteligentes solicitan un trabajo. Se les pide que cierren los ojos mientras se les coloca un sombrero blanco o uno negro en la cabeza. Aquel que deduzca primero el color del sombrero que tiene puesto obtendrá el trabajo. A todos se les coloca un sombrero blanco. Se pide entonces que abran los ojos y que levanten la mano si ven un sombrero blanco en alguien más. En unos momentos, uno de ellos se pone de pie y dice, ... 'Mi sombrero es blanco.' ... ¿Cómo lo supo?

3.5. TABLAS DE VERDAD CON LA CONDICIONAL

Para construir la tabla de verdad de la condicional, se examinará en detalle un ejemplo. Sea p "la temperatura se mantiene abajo de -12 °C durante tres días". Sea q "el lago se congela". En el pronóstico meteorológico de una televisora se informa: "si la temperatura se mantiene abajo de $-$ 12 °C durante tres días, el lago se congelará" Esta proposición se escribe como $p \rightarrow q$.

Si el pronóstico es correcto, entonces $p \rightarrow q$ es verdadera. Si el pronóstico falla, entonces $p \rightarrow q$ es falsa. Existen cuatro posibilidades.

1. La temperatura se mantiene abajo de -12 °C durante tres días (por tanto, p es verdadera), y el lago se congela (q es verdadera). El pronóstico fue acertado.
2. La temperatura se mantiene abajo de $-$ 12 °C durante tres días (p es verdadera), pero el lago no se congela (q es falsa). El pronóstico falló.
3. La temperatura no se mantiene abajo de $-$ 12 °C durante tres días (p es falsa), pero de cualquier modo el lago se congela (q

es verdadera). Se llega a la conclusión de que el pronóstico fue acertado. El meteorólogo no dijo que el lago se congelaría *sólo si* la temperatura se mantenía abajo de − 12 °C durante tres días. Quizás dos días fueran suficientes. Si la temperatura estuvo abajo de − 12 °C el tercer día, el lago seguiría congelado. Puesto que el meteorólogo no comentó lo que sucedería si la temperatura *no* se mantenía abajo de − 12 °C durante tres días, se le concede el beneficio de la duda y se supone que acertó en el pronóstico.

4. La temperatura no se mantiene abajo de − 12 °C durante tres días (p es falsa) y el lago no se congela (q es falsa). Nuevamente, el meteorólogo no tocó el punto de lo que sucedería si la temperatura no se mantenía abajo de − 12 °C durante tres días. Debe suponerse que el meteorólogo acertó.

Los resultados de este análisis pueden generalizarse para construir la tabla de verdad de cualquier condicional.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La condicional sólo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Esta información puede usarse para construir las tablas de verdad de otras proposiciones.

Ejemplo 1

Construir la tabla de verdad de $\sim q \to \sim p$.

Solución

p	q	$\sim q \to \sim p$
V	V	F V F
V	F	V F F
F	V	F V V
F	F	V V V
1	2	3 5 4

El ejemplar 1 muestra que los valores de verdad de $\sim q \to \sim p$ son idénticos a los de $p \to q$, por lo que se llega a la conclusión de que las dos proposiciones son lógicamente equivalentes. En la sección ante-

rior se vio que $\sim q \rightarrow \sim p$ es la contrapuesta de $p \rightarrow q$. Cuando es difícil trabajar con una proposición, puede ser más sencillo trabajar con la contrapuesta.

Ejemplo 2

Construir la tabla de verdad de $q \rightarrow p$.

Solución

p	q	$q \rightarrow p$
V	V	V V V
V	F	F V V
F	V	V F F
F	F	F V F
1	2	3 5 4

A partir de las tablas de verdad del ejemplo 2 y de $p \rightarrow q$, se concluye que un enunciado $p \rightarrow q$ y su recíproca $q \rightarrow p$ *no* son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 3

Construir la tabla de verdad de $\sim p \rightarrow \sim q$.

Solución

p	q	$\sim p \rightarrow \sim q$
V	V	F V F
V	F	F V V
F	V	V F F
F	F	V V V
1	2	3 5 4

Por el ejemplo 3 y la tabla de verdad de $p \rightarrow q$, se concluye que un enunciado $p \rightarrow q$ y su inversa $\sim p \rightarrow \sim q$ no son lógicamente equivalentes. Sin embargo, la inversa de $p \rightarrow q$ es lógicamente equivalente a la recíproca de $p \rightarrow q$ (ver los ejemplos 2 y 3). Es decir, $\sim p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow p$.

Ejemplo 4

Determinar si $\sim(p \rightarrow q)$ es lógicamente equivalente a $\sim p \rightarrow \sim q$.

Solución

En el ejemplo 3 se presentó la tabla de verdad de $\sim p \rightarrow \sim q$. Se construye la tabla de verdad de $\sim(p \rightarrow q)$.

p	q	$\sim(p \to q)$
V	V	F V
V	F	V F
F	V	F V
F	F	F V
1	2	4 3

Se llega a la conclusión de que $\sim(p \to q)$ y $\sim p \to \sim q$ no son lógicamente equivalentes.

La condicional podría aparecer como parte de una proposición más larga.

Ejemplo 5

Construir la tabla de verdad de $\sim (p \wedge q) \to r$.

Solución

p	q	r	$\sim (p \wedge q) \to r$
V	V	V	F V V V
V	V	F	F V V F
V	F	V	V F V V
V	F	F	V F F F
F	V	V	V F V V
F	V	F	V F F F
F	F	V	V F V V
F	F	F	V F F F
1	2	3	5 4 7 6

Las tablas de verdad pueden usarse para estudiar la lógica de un juicio. Un fiscal que se dirige al jurado podría decir "si el acusado es culpable, debe ser condenado por homicidio en primer grado. El acusado es culpable. Por tanto, el jurado debe condenarlo por homicidio en primer grado". El fiscal ha presentado un juicio. Es decir, a partir de los dos primeros enunciados, se pide que se infiera una conclusión.

Definición

Un *juicio* es una serie de proposiciones, una de las cuales (llamada *conclusión)* se infiere, supuestamente, de las otras (llamadas *premisas*).

La conclusión suele anunciarse con una expresión específica, tal como "por lo tanto", "de donde", "así" o "por consiguiente".

Ejemplo 6

Identificar las premisas y la conclusión del juicio siguiente: Si la suma de los dígitos de un número es divisible entre 3, entonces el número también es divisible entre tres. La suma de los dígitos de 693 (6 + 9 + 3 = 18) es divisible entre 3. Por lo tanto, 693 es divisible entre 3.

Solución

Hay dos premisas.

(1) Si la suma de los dígitos de un número es divisible entre 3, entonces el número también es divisible entre 3.
(2) La suma de los dígitos de 693 es divisible entre 3.

La conclusión está después de la expresión "por lo tanto". La conclusión es que 693 es divisible entre 3.

Por lo general, los juicios se presentan en forma simbólica; las premisas se escriben a renglón seguido y la conclusión con un renglón en blanco. El juicio del ejemplo 6 se escribiría así:

s: La suma de los dígitos de un número es divisible entre 3.
n: El número es divisible entre 3.

$$s \rightarrow n$$

$$\frac{s}{n}$$

La lógica simbólica permite determinar si los juicios se basan en razonamientos bien fundamentados. Se dice que un juicio es *válido* si la conclusión se infiere realmente de las premisas. La validez de un juicio se refiere al razonamiento empleado y no al valor de verdad de la conclusión. Los ejemplos que se presentan a continuación se eligieron para ilustrar que valor de verdad y validez son dos conceptos diferentes.

Definición

Un juicio que consta de las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y de la conclusión c es *válido* si $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow c$ es una tautología.

Si una o más de las premisas son falsas, entonces la conjunción $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$ es falsa. Si el antecedente de la condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow c$ es falsa, el valor de verdad de la condicional es verdadero independientemente del valor de verdad del consecuente. En lugar de verificar todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de la condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow c$ para ver si es una tautología, sólo es necesario verificar las combinaciones para las que todas las premisas son verdaderas. Por tanto, puede decirse que un juicio es válido si la conclusión es verdadera siempre que todas las premisas son verdaderas. El procedimiento puede escribirse como un algoritmo.

Para determinar si un juicio es válido:

1. Se construye una tabla de verdad con todas las componentes, todas las premisas y la conclusión como cabezas de columna.
2. Se determinan los valores de verdad de las premisas.
3. Se tachan los renglones que tengan una o más premisas falsas.
4. Si la conclusión es verdadera en los renglones que quedan, el juicio es válido.

Ejemplo 7

Determinar si el juicio siguiente es válido. Si el último dígito de un número es 5, entonces el número es divisible entre 5. El último dígito del número 22 es un 5. (Recuérdese que valor de verdad ≠ validez.) Por lo tanto, el número 22 es divisible entre 5.

Solución

l: el último dígito del número es 5.
f: el número es divisible entre 5.

Se escribe $l \rightarrow f$

$$\frac{l}{f}$$

Se construye la tabla de verdad.

		Premisas		Conclusión	
l	f	$(l \rightarrow f)$	l	f	
V	V	V	V	V	
~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	La primera premisa es falsa: se tacha este renglón
~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	La segunda premisa es falsa: se tacha este renglón
~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	La segunda premisa es falsa: se tacha este renglón

El único renglón que queda es el primero. Puesto que la conclusión es verdadera en este renglón, se dice que el argumento es válido.

Ejemplo 8

Determinar si el juicio siguiente es válido. Si la suma de los dígitos de un número es divisible entre 3, entonces el número es divisible entre 3.
7 (que es la suma de 1+6) no es divisible entre 3
Por lo tanto, el número 16 no es divisible entre 3.

Solución

s: la suma de los dígitos de un número es divisible entre 3.
n: el número es divisible entre 3.

Se escribe: $s \to n$

$$\frac{\sim s}{\sim n}$$

Se construye la tabla de verdad.

		Premisas		Conclusión	
s	n	$(s \to n)$	$\sim s$	$\sim n$	
~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	La segunda premisa es falsa: se tacha este renglón
~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	Ambas premisas son falsas: se tacha este renglón
F	V	V	V	(F)	
F	F	V	V	V	

En el tercer renglón la conclusión es falsa, de modo que el juicio *no* es válido.

Ejemplo 9

Determinar si el juicio siguiente es válido. Si el último dígito de un número es 5, entonces el número es divisible entre 5. El número 10 es divisible entre 5. Por lo tanto, el último dígito del número 10 es 5.

Solución

l: el último dígito de un número es 5.
n: el número es divisible entre 5.

El juicio se escribe: $l \to n$

$$\frac{n}{l}$$

Se construye la tabla de verdad.

l	n	$(l \rightarrow n)$	n	l	
V	V	V	V	V	
~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	Ambas premisas son falsas: se tacha este renglón
F	V	V	V	F	
~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	La segunda premisa es falsa: se tacha este renglón

La conclusión es falsa en el tercer renglón, por lo que el argumento *no* es válido.

En el ejemplo 6 se presenta el caso de un juicio válido con una conclusión verdadera.

En el ejemplo 7 se presenta el caso de un juicio válido con una conclusión falsa.

En el ejemplo 8 se presenta el caso de un juicio no válido con una conclusión verdadera.

En el ejemplo 9 se presenta el caso de un juicio no válido con una conclusión falsa.

Todo juicio que asuma la forma $p \rightarrow q$

$$\frac{p}{q} \text{ es válido.}$$

Los ejemplos 6 y 7 siguen este patrón. Los juicios de esta forma pueden llamarse por su nombre en latín, *modus ponens*. No debe confundirse con el juicio no válido $p \rightarrow q$

$$\frac{q}{p}.$$

En el ejemplo 9 se ilustra esta forma.

Otra forma de juicio válido se llama *modus tollens*: $p \rightarrow q$

$$\frac{\sim q}{\sim p}.$$

No debe confundirse con el juicio no válido $p \rightarrow q$

$$\frac{\sim p}{\sim q}.$$

En el ejemplo 8 se ilustra esta forma.

Ejercicios

Construir las tablas de verdad de las expresiones siguientes. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. $\sim p \to q$ 2. $p \to \sim q$ 3. $q \to \sim p$ 4. $\sim q \to p$

Demostrar que los pares de proposiciones siguientes son lógicamente equivalentes. Ver el ejemplo 4.

5. $p \to q \equiv \sim p \vee q$
6. $\sim p \to q \equiv p \vee q$
7. $p \to \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$
8. $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

Construir las tablas de verdad de las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 5.

9. $(p \wedge q) \to r$
10. $p \wedge (q \to r)$
11. $p \vee (q \to r)$
12. $(p \vee q) \to r$
13. $(p \wedge q) \to \sim r$
14. $(p \vee \sim q) \to r$
15. $(p \wedge \sim q) \to \sim r$
16. $r \to (\sim p \vee q)$
17. $(r \to \sim p) \vee q$
18. $\sim r \to (q \wedge p)$

Determinar si los juicios siguientes son válidos. Ver los ejemplos 7 al 9.

19. Si el escritorio del lector está desordenado, entonces es un genio. El escritorio del lector está desordenado. Por lo tanto, el lector es un genio.
20. Si el escritorio del lector está desordenado, entonces es un genio. El escritorio del lector no está desordenado. Por lo tanto, el lector no es un genio.
21. Si la casa del lector está inmaculada, entonces es una persona descuidada. El lector no es una persona descuidada. Por lo tanto, el lector no es una persona descuidada.
22. Si la casa del lector está inmaculada, entonces es una persona descuidada. El lector no es una persona descuidada. Por lo tanto, la casa del lector no está inmaculada.
23. Si el denominador es cero, entonces la división no está definida. El denominador es cero. Por lo tanto, la división no está definida.
24. Si el denominador es cero, entonces la división no está definida. El denominador no es cero. Por lo tanto, la división está definida.

*25. Un enunciado de la forma "p si y sólo si q" se llama *bicondicional* y se escribe $p \leftrightarrow q$. El enunciado "p si y sólo si q" es equivalente al enunciado "p si q y p sólo si q". Construir una tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$.

*26. La palabra "o" puede usarse en el sentido exclusivo. El símbolo de la "o" exclusiva es $\veebar$. Así, $p \veebar q$ significa "p o q, pero no ambas". Construir la tabla de verdad de $p \veebar q$.

*27. Expresar $p \veebar q$ (ver el problema 26 anterior) en dos formas diferentes sin usar el símbolo $\veebar$.

⇒28. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo para ilustrar un algoritmo para leer los archivos de los empleados de una compañía y para contar el número de quienes han acumulado por lo menos veinte días de incapacidad o veinte días de vacaciones, pero no ambos.

3.6. DECISIONES

Puede usarse el enunciado IF ... THEN (SI ... ENTONCES) en la programación de computadoras cuando se requiere una decisión. La estructura de una decisión con una sola alternativa asume la forma IF (condición) THEN (operación). La operación es un enunciado o un grupo de enunciados escritos en un lenguaje de programación particular. Puede suceder que las operaciones disponibles en un lenguaje no lo estén en otros. Por ello, no se examinarán las operaciones en detalle. Sin embargo, la condición suele ser la comparación matemática de dos cantidades. Los símbolos utilizados en tales comparaciones se denominan *operadores relacionales*.

Operadores relacionales

Símbolos algebraicos	Símbolos en BASIC y Pascal
$=$	=
$<$	<
$\leqslant$	< =
$>$	>
$\geqslant$	> =
$\neq$	< >

Por tanto, podría escribirse IF (X < 3) THEN (operación) o IF (N = 2) THEN (operación). Si la condición es verdadera, se efectuará la operación. Si la condición es falsa, no se efectuará.

En programación de computadoras, los conectivos **AND** (Y), **OR** (O) y **NOT** (NO) se conocen como *operadores booleanos*. Es posible combinar en el mismo enunciado operadores booleanos y relacionales. Los operadores booleanos tienen prioridad respecto de los relacionales. Podría escribirse (X > 4) OR (X < 1) en BASIC o Pascal. Los paréntesis son necesarios. Sin ellos, X > 4 OR X < 1 se interpretaría como X > (4 OR X) < 1, que no tiene sentido. La expresión $2 < X \leqslant 3$ se escribe (2 < X) AND (X < = 3) en BASIC y Pascal.

La palabra AND es necesaria. En álgebra no es posible combinar las dos desigualdades de esta manera.

Ejemplo 1

Escribir las expresions siguientes en BASIC o Pascal.

(a) $X > 3$ o $X < 0$
(b) $2 \leqslant X < 4$
(c) $X = 1$ o $X \neq 3$

Solución

(a) (X > 3) OR (X < 0)
(b) (2 < = X) AND (X < 4)
(c) (X = 1) OR (X < > 3)

Con frecuencia, los operadores booleanos y los relacionales se utilizan en la programación de computadoras para formar la condición en un enunciado de la forma IF ... THEN. Por ejemplo, podría tenerse IF (X < 3) OR (Y > 2) THEN (operación).

Ejemplo 2

Si X es un entero positivo, determinar los valores de X para los que se efectuará la operación.

(a) IF (X > = 2) THEN ....
(b) IF (X < > 100) THEN ....

Solución

(a) X > = 2 significa $X \geq 2$, de modo que $X \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$.
(b) X < > 100 significa $X \neq 100$, de modo que $X \in \{1, 2, 3, 4, \ldots 99, 101, 102, 103, 104, \ldots\}$.

Obsérvese que 100 no está incluido en este conjunto.

Ejemplo 3

Si X es un entero no negativo, determinar los valores de X para los que se efectuará la operación.

(a) IF (X < 3) OR (X > 5) THEN ....
(b) IF (X > = 2) AND (X < = 7) THEN ....

Solución

(a) (X < 3) OR (X > 5) significa $X \in \{0, 1, 2\} \cup \{6, 7, 8, \ldots\}$, de modo que $X \in \{0, 1, 2, 6, 7, 8, \ldots\}$.

(b) (X > = 2) **AND** (X < = 7) significa X ∈ {2, 3, 4, 5, ...} ∩ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, de modo que X ∈ {2, 3, 4, 5, 6, 7}

La estructura de decisión con dos alternativas, disponible en algunos lenguajes, asume la forma IF (condición) THEN (operación 1) ELSE (SI NO) (operación 2). Si la condición es verdadera, se efectuará la operación 1. Si la condición es falsa, se efectuará la operación 2.

Ejemplo 4

Si X = 3, determinar cuál de las operaciones se efectuará.

(a) IF (X > 5) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
(b) IF (X < 3) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
(c) IF (X < = 5) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).

Solución

(a) Si X = 3, la condición X > 5 es falsa; se efectuará la operación 2.
(b) Si X = 3, la condición X < 3 es falsa; se efectuará la operación 2.
(c) Si X = 3, la condición X < = 5 es verdadera; se efectuará la operación 1.

Ejemplo 5

Si X = 1, determinar cuál de las operaciones se efectuará.

(a) IF (X > 3) OR (X < 0) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
(b) **IF** (X < 5) **AND** (X > = 0) **THEN** (operación 1) **ELSE** (operación 2).
(c) IF (X = 1) OR (X = 2) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).

Solución

(a) Si X = 1, (X > 3) OR (X < 0) es falsa; se efectuará la operación 2.
(b) Si X = 1, (X < 5) AND (X > = 0) es verdadera; se efectuará la operación 1.
(c) Si X = 1, (X = 1) OR (X = 2) es verdadera; se efectuará la operación 1.

Ejercicios

Escribir las expresiones algebraicas siguientes en BASIC o Pascal. Ver el ejemplo 1.

1. $A < 3$ o $B > 5$
2. $A \geqslant C$ y $C \leqslant B$
3. $A > 0$ o $A < 5$, o $C > -3$
4. $0 < A < 5$, o $C > -3$
5. $A > 0$, o $-3 < C < 5$
6. $A > 0$ y $C > 5$, y $B < -3$.
7. $X \neq 0$ o $Y \neq 0$
8. $C = 3$, y $X \neq 0$ o $Y \neq 0$
9. $C = 3$ y $X \neq 0$, o $Y \neq 0$
10. $P \geqslant Q$, o $Q < 5$ y $R = 7$

Si X es un entero no negativo, deteminar los valores de X para los que se efectuará la operación. Ver los ejemplos 2 y 3.

11. IF (X < 3) AND (X > 0) THEN ....
12. IF (X < 5) AND (X > = 0) THEN ....
13. IF (X < 2) AND (X > 7) THEN ....
14. IF (X < 6) OR (X > 10) THEN ....
15. IF (X < 1) OR (X > = 7) THEN ....
16. IF ((X > = 0) AND (X < 3)) OR (X > 5) THEN ....
17. IF (X > 0) AND ((X < 3) OR (X > 5)) THEN ....
18. IF (X > 0) AND ((X < 3) OR (X > 7)) THEN ....
19. IF (X < 3) AND (X > 0) THEN ....
20. IF (X < 3) OR (X > 0) THEN ....

Si X = 2, determinar si se efectuará la operación 1 o la operación 2. Ver los ejemplos 4 y 5.

21. IF (X < > 2) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
22. IF (X > = 3) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
23. IF (X < 7) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
24. IF (X > 0) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).

Si X = 5, determinar si se efectuará la operación 1 o la operación 2. Ver los ejemplos 4 y 5.

25. IF (X < 1) OR (X > 3) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
26. IF (X > 1) AND (X < = 3) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
27. IF (X = 3) OR (X = 5) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
28. IF (X > 7) AND (X < 3) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
29. IF (X > 3) AND (X < 7) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
30. IF (X = 5) OR (X = − 5) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).

*31. Considérese el algoritmo siguiente para calcular una comisión sobre ventas. Se emplean estructuras de decisión "anidadas" para no estar verificando el monto de las ventas constantemente. Reformular el algoritmo sin utilizar una estructura de decisión anidada.

Obtener VENTAS.

Si VENTAS $\leqslant$ 200

Entonces asignar a COMISIÓN el 15% de VENTAS.

Si no, si VENTAS $\leqslant$ 400

Entonces asignar a COMISIÓN 30 + 10% de VENTAS mayores de 200.

Si no, asignar a **COMISIÓN** 50 + 8% de **VENTAS** mayores de 400

FIN SI

FIN SI

Presentar COMISIÓN.

⇒**32.** Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo para ilustrar un algoritmo con estructuras de decisión anidadas para calcular impuestos de acuerdo con la escala siguiente:

3 por ciento de los primeros $ 2 000, 4 por ciento de los siguientes $ 2 000, y 6 por ciento de cualquier cantidad superior a $ 6 000.

3.7. ÁLGEBRA BOOLEANA

Cuando Boole estudió la relación entre las propiedades de los conjuntos y la lógica, observó que eran similares a las propiedades de los números reales.

Propiedades de cerradura:

En conjuntos: Si A y B son conjuntos, entonces $A \cup B$ es un conjunto.
Si A y B son conjuntos, entonces $A \cap B$ es un conjunto.

En lógica: Si p y q son proposiciones, entonces $p \vee q$ es una proposición.
Si p y q son proposiciones, entonces $p \wedge q$ es una proposición.

En los números reales: Si a y b son números reales, entonces $a + b$ es un número real.
Si a y b son números reales, entonces ab es un número real.

Propiedades conmutativas:

En conjuntos: Si A y B son conjuntos, entonces $A \cup B = B \cup A$.
Si A y B son conjuntos, entonces $A \cap B = B \cap A$.

En lógica: Si p y q son proposiciones, entonces $p \vee q \equiv q \vee p$.
Si p y q son proposiciones, entonces $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

En los números reales: Si a y b son números reales, entonces $a + b = b + a$.
Si a y b son números reales, entonces $ab = ba$.

Propiedades asociativas:

En conjuntos: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

En lógica: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.

En los números reales: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Boole se percató de que la analogía no se mantenía para todas las propiedades de campo de los números reales. Sólo hay una propiedad distributiva en los números reales. La multiplicación se distribuye en la adición, pero no a la inversa. En conjuntos y lógica, hay dos propiedades distributivas.

Propiedades distributivas:

En conjuntos: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

En lógica: $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ y
$P \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

En los números reales: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Así, Boole descubrió que el álgebra de los números reales no es la única que puede desarrollarse. Más adelante se verá (capítulo 8) que el álgebra de matrices es un ejemplo de otra álgebra más, en la que no se cumple la propiedad conmutativa.

Las propiedades restantes del álgebra booleana son:

Propiedades de idempotencia.

En conjuntos: $A \cup A = A$
$A \cap A = A$

En lógica: $p \vee p \equiv p$
$p \wedge p \equiv p$

Propiedades de complementación:

En conjuntos: $A \cup A' = U$
$A \cap A' = \phi$

En lógica: $p \vee \sim p \equiv \mathrm{T}$
$p \wedge \sim p \equiv \mathrm{F}$

Leyes de De Morgan:

En conjuntos: $(\mathrm{A} \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

En lógica: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Propiedades del doble complemento:

En conjuntos: $(A')' = A$

En lógica: $\sim(\sim p) \equiv p$

Leyes de absorción:

En conjuntos: $A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap (A \cup B) = A$

En lógica: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Propiedades especiales:

En conjuntos: $A \cup U = U$
$A \cap U = A$
$A \cup \phi = A$
$A \cap \phi = \phi$
$\phi' = U$
$U' = \phi$

En lógica: $p \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$
$p \wedge \mathrm{T} \equiv p$
$p \vee \mathrm{F} \equiv p$
$p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$
$\sim\mathrm{F} \equiv \mathrm{T}$
$\sim\mathrm{T} \equiv \mathrm{F}$

En *álgebra booleana*, que es el álgebra tanto de conjuntos como de la lógica, se usa el signo + en lugar de $\cup$ o $\vee$, y se usa $\cdot$ en lugar de $\cap$ o $\wedge$. También, se usa 1 en lugar de U o V, y 0 se usa en lugar de ϕ o F. El "1" y el "0" son meros símbolos y no el 1 y el 0 del sistema de los números reales. Por tanto, un enunciado puede expresar una propiedad tanto en conjuntos como en lógica.

Notación de álgebra booleana:

Álgebra booleana	Conjuntos	Lógica
+	$\cup$	$\vee$
$\cdot$	$\cap$	$\wedge$
'	'	$\sim$
0	ϕ	F
1	U	T

Las propiedades del álgebra booleana, expresadas en esta notación, son:

Propiedades del álgebra booleana

Propiedades conmutativas:

$A + B = B + A$ $\qquad$ $A \cdot B = B \cdot A$

Propiedades asociativas:

$(A + B) + C = A + (B + C)$ $\qquad$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Propiedades distributivas:

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $\qquad$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Propiedades de idempotencia:

$A + A = A$ $\qquad$ $A \cdot A = A$

Propiedades de complementación:

$A + A' = 1$ $\qquad$ $A \cdot A' = 0$

Leyes de De Morgan:

$(A + B)' = A' \cdot B'$ $\qquad$ $(A \cdot B)' = A' + B'$

Propiedad del doble complemento:

$(A')' = A$

(*Continuación*)

Leyes de absorción:	
$A \cdot (A + B) = A$	$A + (A \cdot B) = A$
Propiedades en que participan 0 y 1:	
$A + 1 = 1$	$A \cdot 0 = 0$
$0' = 1$	$1' = 0$
$A + 0 = A$	$A \cdot 1 = A$

Estas propiedades puede verificarse utilizando diagramas de Venn y tablas de verdad.

Ejemplo 1

Verificar la propiedad conmutativa $a + b = b + a$ para conjuntos y lógica.

Solución

Para conjuntos, se verifica que $A \cup B = B \cup A$ utilizando diagramas de Venn. Ver las figuras 3.1 y 3.2. Puesto que los diagramas son idénticos, los conjuntos son iguales.

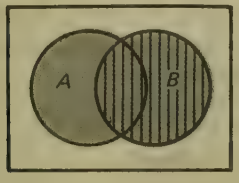


Figura 3.1

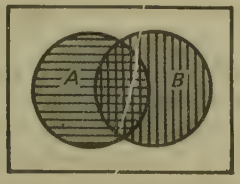


Figura 3.2

En lógica, se verifica que $p > q = q > p$ utilizando tablas de verdad. Puesto que las columnas finales son idénticas, las proposiciones son lógicamente equivalentes.

p	q	p	$\vee$	q
V	V	V	**V**	V
V	F	V	**V**	F
F	V	F	**V**	V
F	F	F	**F**	F
1	2	3	5	4

p	q	q	$\vee$	p
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	V
F	V	V	**V**	F
F	F	F	**F**	F
1	2	3	5	4

Ejercicios

Para los enunciados de una propiedad del álgebra booleana siguientes, decir el nombre de la propiedad y verificarla tanto para conjuntos como para lógica. Ver el ejemplo 1.

1. $A \cdot B = B \cdot A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
4. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
5. $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
6. $A + A = A$
7. $A \cdot A = A$
8. $A + A' = 1$
9. $A \cdot A' = 0$
10. $(A + B)' = A' \cdot B'$
11. $(A \cdot B)' = A' + B'$
12. $(A')' = A$
13. $A \cdot (A + B) = A$
14. $A + (A \cdot B) = A$

Para los enunciados de una propiedad del álgebra booleana siguientes, verificar la propiedad para conjuntos y para lógica. Ver el ejemplo 1.

15. $A + 1 = 1$
16. $A \cdot 0 = 0$
17. $1' = 0$
18. $0' = 1$
19. $A \cdot 1 = A$
20. $A + 0 = A$

*21. En álgebra booleana $X \cdot X = X$. En el álgebra de los números reales, ¿ para qué valores de X se cumple que $X \cdot X$ es igual a X ?

*22. En el álgebra de los números reales se cumple que si $A \neq 0$ y $A \cdot X = A \cdot Y$, entonces $X = Y$. ¿Ocurre lo mismo en el álgebra booleana?

*23. En el álgebra de los números reales se cumple que si $X \cdot Y = 0$, entonces $X = 0$ o $Y = 0$. ¿Ocurre lo mismo en el álgebra booleana?

*24. ¿Cuál símbolo de la notación de conjuntos corresponde a $\rightarrow$ de la lógica simbólica?

3.8. CIRCUITOS

En 1938, Claude Shannon descubrió que el álgebra booleana tiene una importante aplicación en el diseño de circuitos eléctricos. En la figura 3.3 se ilustra parte de un circuito eléctrico. (No se muestra la batería u otra fuente de energía porque sólo los interruptores se re-

Figura 3.3

lacionan con el álgebra booleana.) Las líneas representan *conectores* o alambres que conducen corriente eléctrica. La corriente no puede fluir de un extremo al otro del circuito si el interruptor que está en medio se encuentra abierto. Se dice que el interruptor está "apagado".

Si el interruptor se pasa a la posición de "encendido" (por ejemplo, si se cierra el interruptor), entonces la corriente fluirá. Ver la figura 3.4.

Figura 3.4

En ocasiones, el interruptor estará abierto y en otras cerrado. El circuito se dibuja con un hueco en el sitio donde se colocaría el interruptor y se marca con una letra del alfabeto para indicar que se trata de un interruptor variable (por ejemplo, que puede estar encendido o apagado). Ver la figura 3.5.

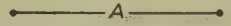
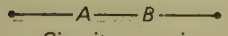


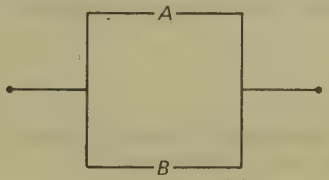
Figura 3.5

En el mismo circuito puede haber dos interruptores o más. Los interruptores pueden estar combinados *en serie* (extremo con extremo) o *en paralelo* (lateralmente), como se ilustra en las figuras 3.6 y 3.7. Para ir de un extremo a otro de un circuito en serie, la corriente debe fluir por A y por B. Para ir de un extremo a otro de un circuito en paralelo, la corriente debe fluir por A o por B ("o" inclusivo).



Circuito en serie

Figura 3.6

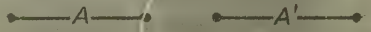


Circuito en paralelo

Figura 3.7

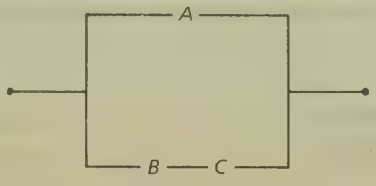
De los interruptores que operan de tal modo que uno está cerrado cuando el otro está abierto, se dice que están en *estado opuesto*. La notación del álgebra booleana se aplica en los circuitos con interruptores variables. Por tanto, $A \cdot B$ o AB denota dos interruptores en serie (la corriente debe fluir por A y por B), $A + B$ denota dos interruptores en paralelo (la corriente debe fluir por A o por B), y A' denota un interruptor en la condición opuesta a la de A (si la corriente fluye por A, no fluye por A').

Notación y diagramas de circuitos de conmutación

Notación	*Descripción*	*Diagrama*
$A \cdot B$	Dos interruptores en serie	
$A + B$	Dos interruptores en paralelo	
A'	Interruptor en condición opuesta a la de A	

Ejemplo 1

Escribir una expresión booleana para el circuito con interruptores siguiente.



Solución

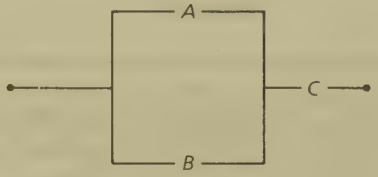
La corriente que fluye en la trayectoria superior debe fluir por A. La corriente que fluye en la trayectoria inferior debe fluir por B y por C. Puesto que la corriente puede fluir en la trayectoria superior o en la inferior, se tiene $A + (BC)$.

Ejemplo 2

Dibujar el circuito con interruptores representado por $(A + B)\,C$.

Solución

La corriente debe fluir por A o por B, y por C. Por consiguiente, debe fluir forzosamente por C y se tiene



Si 0 representa un interruptor por el que no fluye corriente, mientras que 1 representa un interruptor por el que sí fluye, todas las propiedades del álgebra booleana se aplican a los circuitos con interrup-

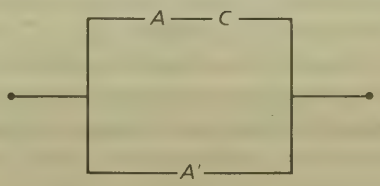
tores. Estas propiedades pueden usarse para simplificar un circuito. Es decir, es posible usar un número menor de interruptores para conseguir el mismo resultado. Si se usan menos interruptores, se reducirán los costos de producción del fabricante.

Para simplificar un circuito con interruptores:

1. Se escribe una expresión booleana para el circuito.
2. Se aplican las propiedades del álgebra booleana a la expresión.
3. Se dibuja el circuito simplificado.

Ejemplo 3

Simplificar el circuito:

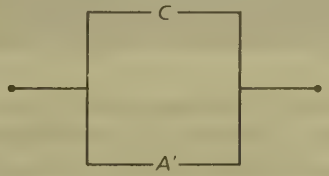


Solución

El circuito está representado por $(AC) + A'$.

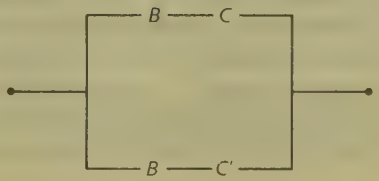
$(AC) + A' = (A + A')(C + A')$ por una de las propiedades distributivas;
$= 1\ (C + A')$ por la propiedad del complemento: $A + A' = 1$;
$= C + A'$ ya que $1\ X = X$.

Por tanto, el circuito podría dibujarse:



Ejemplo 4

Simplificar el circuito:



Solución

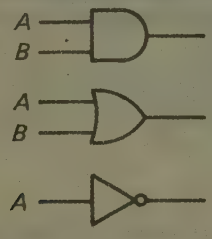
El circuito puede representarse como $(BC) + (BC')$.

$(BC) + (BC') = B(C + C')$ por una de las propiedades distributivas;
$= B \cdot 1$ por la propiedad del complemento: $C + C' = 1$;
$= B$ ya que $X \cdot 1 = X$.

Por tanto el circuito puede dibujarse

Los componentes físicos de los circuitos de las computadoras digitales están diseñados para responder a dos niveles de voltaje. A pesar de que los dos niveles de voltaje pueden diferir de una máquina a otra, se emplea el álgebra booleana para describir los circuitos. Si "1" se asocia con el voltaje mayor y "0" con el menor, la asignación se denomina convención de *lógica positiva*. Los elementos básicos de los circuitos reciben el nombre de *compuertas*, debido a que dirigen el flujo de las señales lógicas del mismo modo que los interruptores dirigen la corriente eléctrica. Los símbolos empleados en dichos circuitos se muestran en la tabla siguiente.

Símbolos de las puertas lógicas

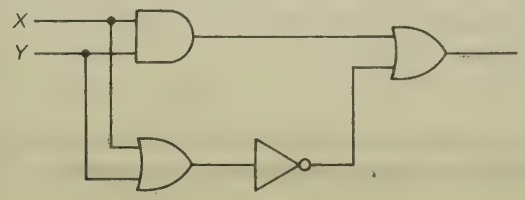


A la representación gráfica que ilustra la interconexión de compuertas lógicas se le llama *diagrama lógico*. El valor del voltaje de salida (con frecuencia llamado simplemente la *salida*) de una compuerta AND es "1", si todos los voltajes de entrada (o *entradas*) tienen un valor "1". La salida de una puerta OR tiene el valor "1" si al menos una de las entradas tiene el valor "1". Por tanto, el enlistamiento de la salida para todas las entradas posibles se parece mucho a la construcción de una tabla de verdad, en la cual se usan 1 en lugar de las V y 0 en lugar de las F. (En aplicaciones de computación y electrónica, los 0 suelen enlistarse antes que los 1. En el presente texto se

enlistan primero los 1 para enfatizar la analogía con las tablas de verdad.)

Ejemplo 5

Determinar la salida para todas las entradas posibles en el diagrama lógico siguiente.



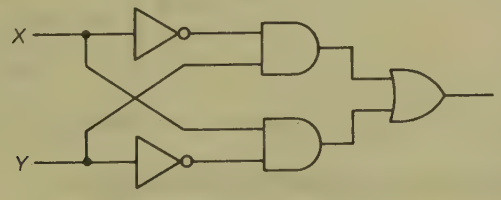
Solución

La salida del circuito puede representarse como $(XY) + (X + Y)'$. Hay cuatro entradas posibles para X y Y. Éstas se muestran en la tabla siguiente.

X	Y	(XY)	+	$(X$	+	$Y)'$
1	1	1	**1**	1		0
1	0	0	**0**	1		0
0	1	0	**0**	1		0
0	0	0	**1**	0		1
1	2	3	**6**	4		5

Ejemplo 6

Determinar la salida para todas las entradas posibles en el diagrama lógico siguiente.



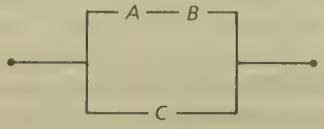
La salida del circuito puede representarse como $XY' + X'Y$. Las cuatro entradas posibles se muestran en la tabla siguiente.

X	Y	X	·	Y'	+	X'	·	Y
1	1	1	0	0	**0**	0	0	1
1	0	1	1	1	**1**	0	0	0
0	1	0	0	0	**1**	1	1	1
0	0	0	0	1	**0**	1	0	0
1	2	3	5	4	**9**	6	8	7

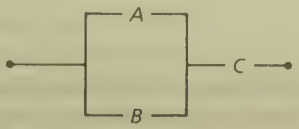
Ejercicios

Escribir una expresión booleana para los circuitos con interruptores siguientes. Ver el ejemplo 1.

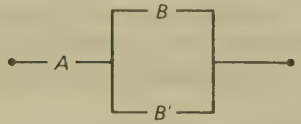
1.



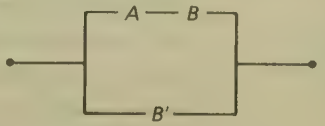
2.



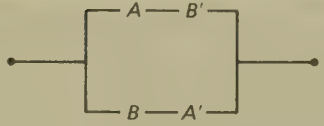
3.



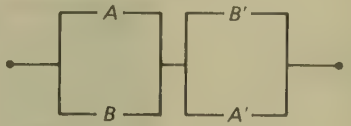
4.



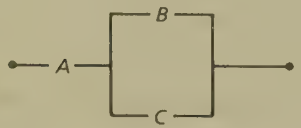
5.



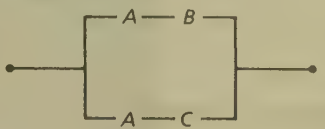
6.



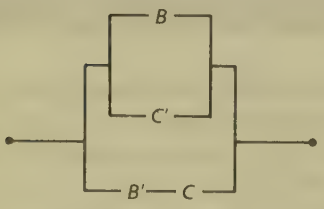
7.



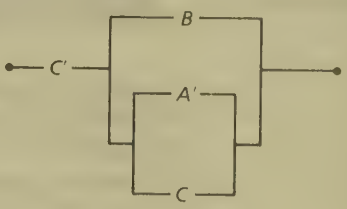
8.



9.



10.



Dibujar un circuito con interruptores para las expresiones booleanas siguientes. Ver el ejemplo 2.

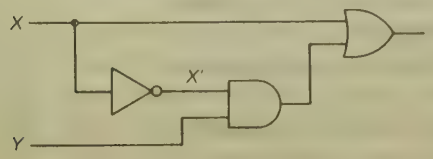
11. $A + B'C$
12. $(A + B')C$
13. $AC + B'C$
14. $(A + B)(A + C)$

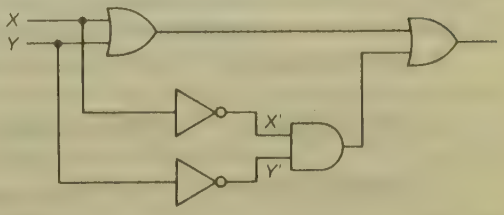
15. $A + (BC)$
16. $A(A + B)$
17. $A + AB$
18. $(A + B')(A' + B)$
19. $(AB')(AB)$
20. $(A + BC) + C$

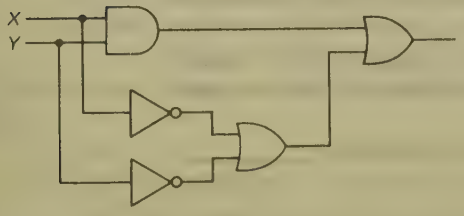
Simplificar los circuitos siguientes. Ver los ejemplos 3 y 4.

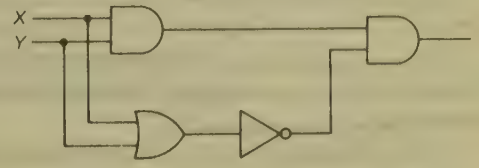
21. $B(AB + B)$
22. $AB(A + B')$
23. $A + B(A + B')$
24. $A + B + A'B'$
25. $B(A + C) + C$
26. $A' + AB + C$
27. $(A + BC)C'$
28. $AB' + BC + B$
29. $(A + B)(B + AC)$
30. $ABC + ABC'$

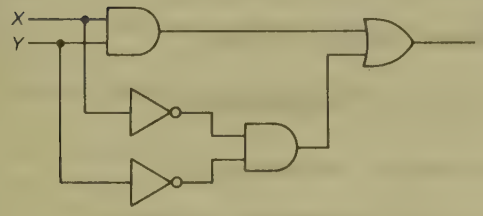
Determinar la salida para todas las entradas posibles de los diagramas lógicos siguientes. Ver el ejemplo 5.

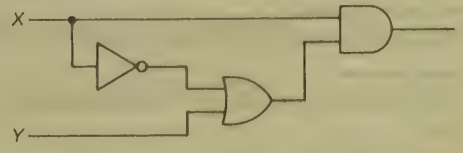
31.


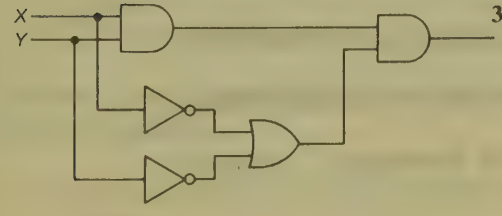
32.


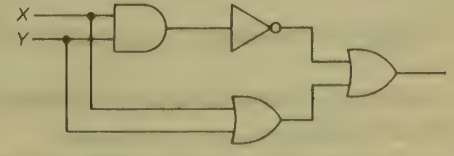
33.


34.


35.


36.


37.


38.


*39. (a) Dibujar un circuito con interruptores para la expresión booleana $(A + B)C + [A'(B \cdot + C) + B']$.
(b) Simplificar el circuito y dibujar el circuito simplificado.

Revisión de capítulo

Una _____ es un enunciado asertivo que es verdadero o falso, pero no ambos.

"Y", "o", "no" y "si ... entonces" se llaman _____.

A una proposición de la forma $p \wedge q$ se le llama _____.

A una proposición de la forma $p \vee q$ se le llama _____.

A una proposición de la forma $\sim p$ se le llama _____.

Dos proposiciones son _____ _____si tienen los mismos valores de verdad para cualquier combinación de los valores de verdad de las proposiciones simples que las integran.

A una proposición de la forma $p \rightarrow q$ se le llama _____ _____.

La proposición $q \rightarrow p$ es la _____ de la proposición $p \rightarrow q$.

La proposición $\sim p \rightarrow \sim q$ es la _____ de la proposición $q \rightarrow p$.

La proposición $\sim q \rightarrow \sim p$ es la _____ de la proposición $p \rightarrow q$.

Un _____ es una serie de proposiciones, una de las cuales (llamada la _____) se infiere, supuestamente, de las otras (llamadas _____).

A los símbolos $=, <, \leqslant, >$ y $\geqslant$ se les llama operadores _____ _____.

La estructura de decisión con una sola alternativa asume la forma _____.

La estructura de decisión con dos alternativas asume la forma _____ _____.

En álgebra booleana, la notación _____ corresponde a $\cup$ o $\vee$.

En álgebra booleana, la notación _____ corresponde a $\cap$ o $\wedge$.

En álgebra booleana, la notación _____ corresponde a U o V.

En álgebra booleana, la notación _____ corresponde a ϕ o F.

Se dice que los interruptores colocados extremo con extremo en un circuito están en _____.

Se dice que los interruptores colocados lateralmente en un circuito están en _____.

Se dice que los interruptores que operan de tal modo que uno está cerrado cuando el otro está abierto están en _____ _____.

Prueba de capítulo

Escribir las proposiciones compuestas de los problemas 1 al 5 en forma simbólica utilizando las letras indicadas.

s: Tiene 64K de RAM.
t: Tiene 128K de RAM.
d: Tiene dos unidades de disco.
e: Tiene monitor cromático.

1. Tiene 64K de RAM y monitor cromático.
2. Tiene 128K de RAM y dos unidades de disco.
3. Tiene dos unidades de disco, pero no un monitor cromático.
4. Tiene 64K o 128K de RAM, y dos unidades de disco.
5. Tiene 128K de RAM, y dos unidades de disco o un monitor cromático.
6. Construir la tabla de verdad de $\sim(p \vee \sim q)$.
7. Construir la tabla de verdad de $\sim p \wedge q$.
8. Aplicar las leyes de De Morgan para reformular $\sim(p \vee \sim q)$.

Determinar si los enunciados siguientes son lógicamente equivalentes.

9. (a) No se puede ser muy rico o muy delgado.
   (b) No se puede ser muy rico ni muy degado.
10. (a) No se puede ser muy rico o muy delgado.
    (b) No se puede ser muy rico o no se puede ser muy delgado.

Colocar paréntesis para indicar el orden correcto de los conectivos.

11. $p \vee \sim q \wedge r$
12. $\sim p \wedge \sim q \vee r$
13. Construir la tabla de verdad de $(p \wedge \sim q) \vee \sim$r.
14. ¿Es $p \vee (\sim q \wedge r) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee r)$?
15. ¿Es $(\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$ una tautología?

Escribir la forma simbólica de las proposiciones siguientes utilizando las letras indicadas.

16. Si el lector pela cebollas sumergidas en agua, entonces no llorará.

p: el lector pela cebollas sumergidas en agua.
q: el lector llora.

17. Si el perejil se lava con agua caliente entonces conservará su sabor y será más fácil de picar.

h: el perejil se lava con agua caliente.
r: el perejil conserva su sabor.
s: el perejil es fácil de picar.

18. Colocar paréntesis para indicar el orden correcto de los conectivos:

$p \wedge \sim q \rightarrow r \wedge s$.

19. Escribir la inversa y la negación de: Si los limones se calientan antes de usarlos, entonces tendrán el doble de jugo.
20. Escribir la recíproca y la contrapuesta de: Si las claras de huevo se baten en un recipiente de aluminio, tomarán un color oscuro.
21. Construir la tabla de verdad de $\sim p \rightarrow \sim q$.
22. Demostrar que $\sim p \rightarrow \sim q \equiv p \vee \sim q$.

Construir la tabla de verdad de los enunciados siguientes.

23. $(\sim p \wedge q) \rightarrow r$.
24. $p \rightarrow (\sim q \wedge r)$.
25. Determinar la validez de los juicios siguientes:

Si se agrega un poco de sal al almidón, la plancha no se pegará.
No se agregó un poco de sal al almidón.
Por lo tanto, la plancha se pegará.

Escribir las expresiones algebraicas siguientes en BASIC o Pascal.

26. $X > 3$ y $X \leqslant 5$
27. $A > 0$, o $A \leqslant 7$ y $B > 2$

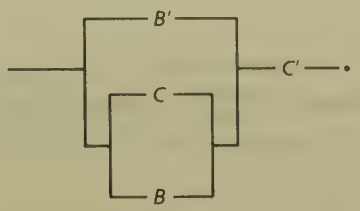
28. Si X es un entero no negativo, ¿para qué valores de X se efectuará la operación) IF (X > 7) AND (X > 5) THEN (operación).

Si X = 3, determinar si se efectuará la operación 1 o la operación 2.

29. IF (X < > 4) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).
30. IF (X > 5) OR (X > 1) THEN (operación 1) ELSE (operación 2).

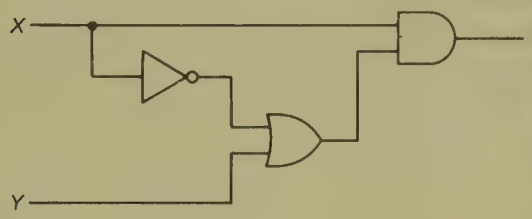
Para los enunciados de una propiedad de álgebra booleana siguientes, decir el nombre de la propiedad y verificarla para conjuntos y para lógica.

31. $(A + B) + C = A + (B + C)$
32. $A\ (B + C) = AB + AC$
33. $(A + B)' = A' \cdot B'$.
34. $A + A' = 1$
35. $A(A + B) = A$
36. Escribir una expresión booleana de

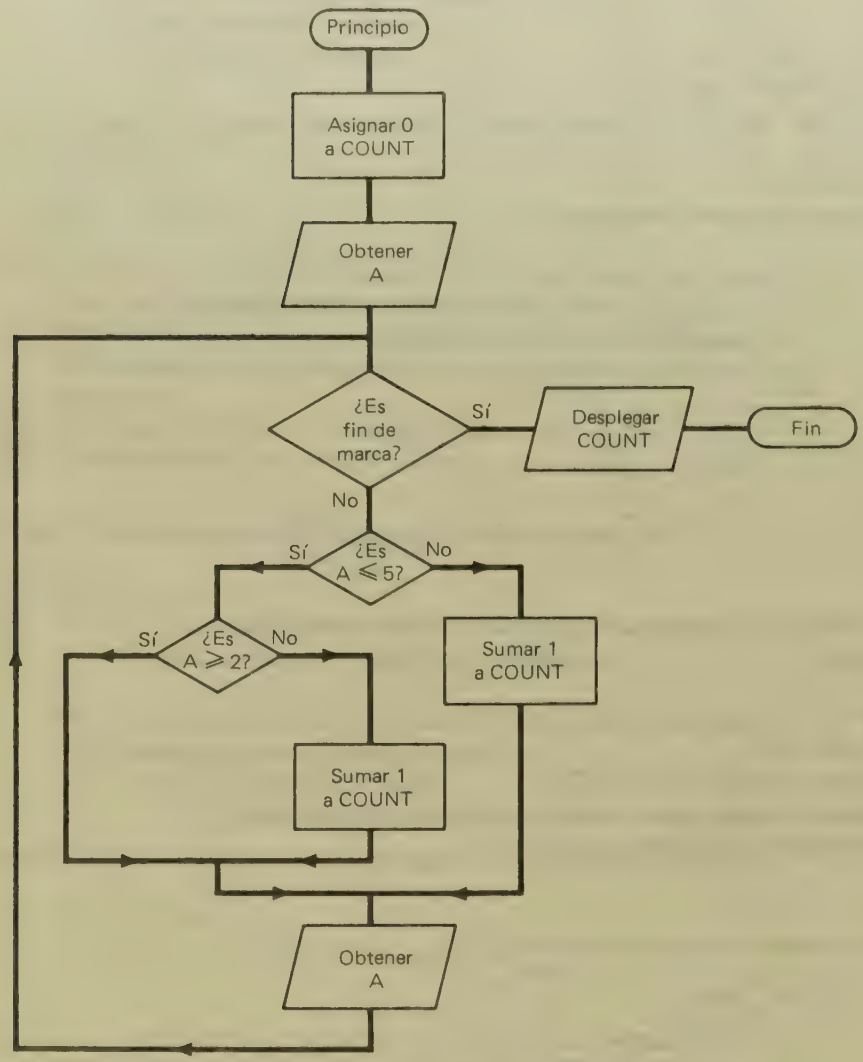


Dibujar un circuito de conmutación para ilustrar las expresiones booleanas siguientes.

37. $BC' + B'C$.
38. $(B + C')\ (B' + C)$.
39. Simplificar el circuito $(A + B'C)B$.
40. Determinar la salida para todas las entradas posibles en el diagrama lógico de la figura siguiente.



⇒41. En el diagrama de flujo de la figura siguiente se muestra un algoritmo que acepta una lista de números A como entrada y cuenta aquellos que no son (menores o iguales que 5) o no son (mayores o iguales que 2). Usar la ley de De Morgan para simplificarlo.



BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Bookman, Jack. "Why 'False → False' is True – A Discovery Explanation," en *The Mathematics Teacher*, Vol. 71 No. 8 (Noviembre de 1978), 675-676.

Fitting, Melvin. "Propositional Logic Using Elementary Algebra," en *Mathematics and Computer Education*, Vol. 16 No. 3 (otoño de 1982), 204-207.

Gardner, Martin. "Boolean Algebra, Venn Diagrams and the Propositional Calculus," en *Scientific American*, Vol. 220 No. 2 (Febrero de 1969), 110-114.

Gardner, Martin. "The Jump Proof and its Similarity to the Toppling of a Row of Dominoes," en *Scientific American*, Vol. 236 No. 5 (Mayo de 1977), 128-135. (Se generalizan los problemas de los sombreros.)

Biografía George Boole

George Boole nació el 2 de noviembre de 1815. Su padre era un zapatero que apenas ganaba lo suficiente para sostener a su familia. Boole creía que una educación tradicional le permitiría llevar una vida más desahogada. Aprendió por su cuenta latín, francés y alemán a los 14 años de edad. Cuando tenía 15, su padre tuvo serias dificultades económicas y Boole tuvo que ayudar al sostenimiento de la familia. Se hizo maestro en una escuela elemental para varones. A pesar de que disponía de poco tiempo para continuar su educación autodidacta, dedicaba sus ratos libres a estudiar matemáticas.

En 1835 abrió una escuela propia y empezó a publicar algunos de sus trabajos. En 1847 escribió un artículo titulado "Análisis matemático de la lógica, Ensayo dirigido al cálculo del razonamiento deductivo". Es posible que este opúsculo lo escribiera en defensa de su amigo Augustus De Morgan, quien estaba envuelto en una controversia a raíz de sus escritos. Boole consiguió abordar la lógica de una manera mucho más simple que cualquiera de sus antecesores.

Aun cuando carecía de título académico, en 1849 Boole fue nombrado para el puesto de profesor de matemáticas en el Queen's College en Cork, Irlanda. Sus colegas consideraban una excentricidad que cuando conocía alguna persona de origen social similar al suyo, lo invitara a su casa a discutir sobre ciencia.

En 1854 se publicó ***Una investigación de las leyes del pensamiento en las que se basaban las teorías matemáticas de la lógica y la probabilidad*** (mejor conocida como ***Las leyes del pensamiento***), donde explicaba y ampliaba su tratamiento de la lógica. En noviembre de 1864, mientras caminaba bajo una intensa lluvia para asistir a sus clases, contrajo pulmonía. Murió el 8 de diciembre.

Después de la muerte de Boole, Mary Everest Boole, su esposa desde 1855 y madre de sus cinco hijas (también sobrina de sir George Everest, de quien toma el apellido Everest), escribió un opúsculo titulado "La psicología de Boole", en el que aplicó algunas de sus ideas a la educación de los niños.

4

Sistemas de numeración

Debido a que una bombilla eléctrica sólo puede estar encendida o apagada, su funcionamiento es similar al de un dígito del sistema de numeración binario empleado en las computadoras. Este sistema sólo tiene dos dígitos, 0 y 1. Por lo general, los componentes de los circuitos de computadora se diseñan para responder a un nivel de voltaje alto como 1 y a un nivel de voltaje bajo como 0.

4.1. ENTEROS BASE DOS

Cuando las "nuevas matemáticas" se popularizaron, muchos profesores distinguían entre número y numeral. *Número* es un concepto abstracto; *numeral* es el símbolo utilizado para denotar un número. Sólo existe un número "cuatro", pero existen diversas maneras de escribir el símbolo de dicho número. Por ejemplo, los antiguos egipcios escribían 256 como 𓆼𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢𓏺𓏺𓏺. Cada uno de estos símbolos representa un valor, y el número representado cuando se combinan es la suma de los mismos. A tal sistema se le llama *aditivo*. Si nuestro sistema numérico fuera aditivo, 256 sería igual a 2 + 5 + 6, o 13. En cambio, el "2" en este numeral representa 2 centenas debido a su posición. Sin embargo, el "2" en 625 representa 2 decenas. Los numerales 256 y 625 tendrían el mismo valor en un sistema aditivo, pero sus valores son diferentes en nuestro sistema. Se dice que cada dígito tiene un *valor posicional* o relativo basado en el sitio que ocupa.

Con valores posicionales de unidades, decenas, centenas, unidades de millar, etc., se utilizan potencias de 10. En la tabla siguientes se enlistan las primeras potencias de 10.

Potencias de 10

$10^0 = 1$ $10^1 = 10$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1\,000$ $10^4 = 10\,000$

Nuestro sistema de numeración se llama *decimal* o *base 10*. Este sistema recibe su nombre del número de símbolos que se usan como dígitos y de sus valores posicionales.

Sistema de numeración decimal o base 10

1. Existen diez símbolos que se usan como dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
2. Los valores posicionales son potencias de la base 10.

Considérese el numeral 36 824. Si cada dígito se marca con su valor posicional, se tiene:

$$\frac{3}{10^4}\ \frac{6}{10^3}\ \frac{8}{10^2}\ \frac{2}{10^1}\ \frac{4}{10^0}.$$

Las computadoras usan un sistema *binario* o *base 2*. En él los símbolos 0 y 1 tienen valores posicionales que dependen del sitio donde están colocados. En la tabla siguiente se enlistan las primeras potencias de dos.

Potencias de 2

$2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$ $2^5 = 32$
$2^6 = 64$

Este sistema también toma su nombre del número de símbolos que se usan como dígitos (llamados *bits*, contracción del término inglés *binary digits*, dígitos binarios) y de sus valores posicionales.

Sistema de numeración binario o base 2

1. Hay dos símbolos que se usan como bits: 0 y 1.
2. Los valores posicionales son potencias de la base 2.

Considérese el numeral base dos 101101. Si se marca cada bit con su valor posicional, se tiene: $\frac{1}{32}\ \frac{0}{16}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{0}{2}\ \frac{1}{1}$. Debe leerse "uno cero uno uno cero uno". Puesto que no hay nombres especiales

(tales como "centenas" o "unidades de millar") para los valores posicionales en base dos; se hará referencia a "grupos de 32" o "grupos de 16", y así sucesivamente. Por tanto, el numeral 101101 base dos representa:

1 grupo de 32 = 32
0 grupos de 16 = 0
1 grupo de 8 = 8
1 grupo de 4 = 4
0 grupos de 2 = 0 y
1 grupo de 1 = 1 para un total de 45.

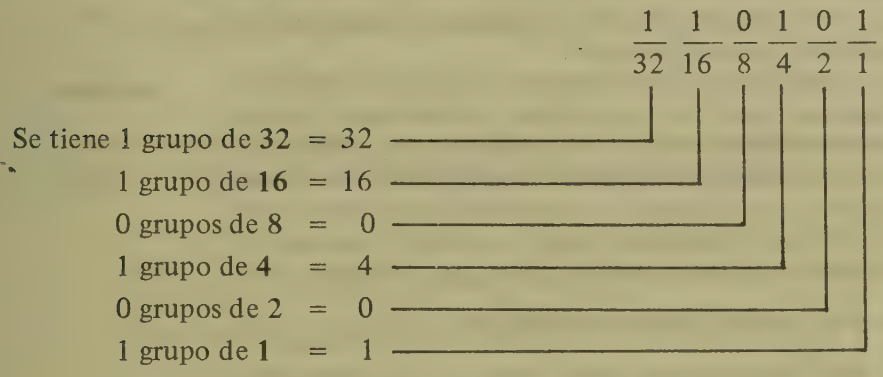
Cuando se consideran numerales en dos bases o más simultáneamente, la base se escribirá como subíndice a fin de evitar confusiones. 101101_2 representa cuarenta y cinco, como se indicó en el ejemplo anterior, pero 101101_{10} representa ciento un mil ciento uno. Si se omite el subíndice, se sobreentiende que la base es 10.

Convertir 110101_2 a un numeral en base 10.

Ejemplo 1

Solución

Se marcan los bits de este numeral con sus valores posicionales. Se conocen los dígitos y los valores posicionales.



para un total de 53_{10}.

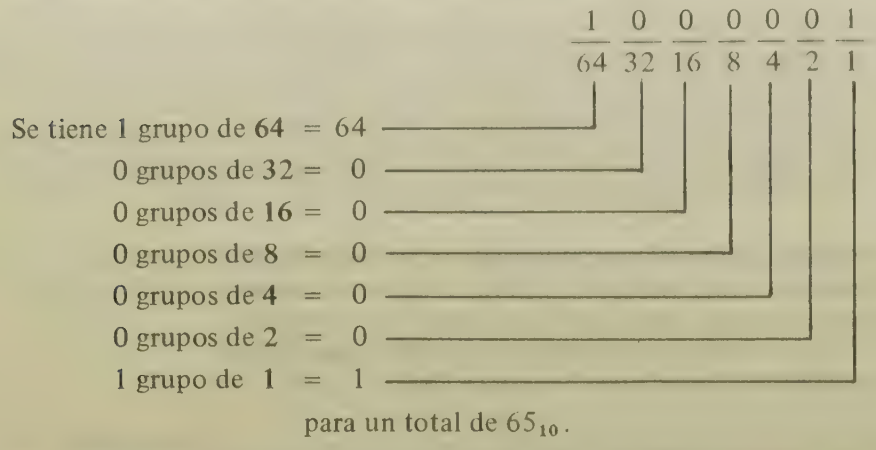
Por lo tanto, se dice que $110101_2 = 53_{10}$.

Convertir 1000001_2 a un numeral base 10.

Ejemplo 2

Solución

Los bits de este numeral se marcan con sus valores posicionales. Se conocen los dígitos y los valores posicionales.



para un total de 65_{10}.

Por lo tanto, se dice que $1000001_2 = 65_{10}$.

Las computadoras utilizan un sistema binario para almacenar números. Este sistema es conveniente ya que los números pueden representarse utilizando sólo dos niveles de voltaje; uno de ellos representa 0 en tanto que el otro representa 1. Es importante entender la forma como el sistema binario se relaciona con el sistema base 10 común. Se usa la base 10 para las entradas, pero la computadora convierte los numerales a base 2 para realizar cálculos, y después los vuelve a convertir a base 10 para presentar un resultado.

Se han visto ya varios ejemplos de conversión de base 2 a base 10. Para convertir un numeral base 10 a uno en base 2, es necesario pensar de nuevo en función de potencias de 2. Por ejemplo, 98_{10} debe convertirse a un numeral base 2 que tiene valores posicionales (de izquierda a derecha) 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 64. Aun cuando no se sabe cuáles son los bits, sí se sabe que el numeral tendrá siete bits. El octavo bit representaría un valor posicional más alto que el que se necesita para escribir 98_{10}. De este modo se tiene un numeral de la forma $\underset{64}{\_\_}\ \underset{32}{\_\_}\ \underset{16}{\_\_}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_}$. Para llenar los espacios en blanco, uno se pregunta ¿cuántos grupos de 64 hay en 98? Puesto que $98 \div 64 = 1$ R 34, se pone un "1" en la posición del 64. A continuación, el "34" que quedó debe distribuirse en las posiciones restantes. Puesto que hay un grupo de 32 en 34 ($34 \div 32 = 1$ R 2), se pone un "1" en la posición de 32. No hay grupos de 16 en 2, ni de 8, ni de 4. Por lo tanto, se

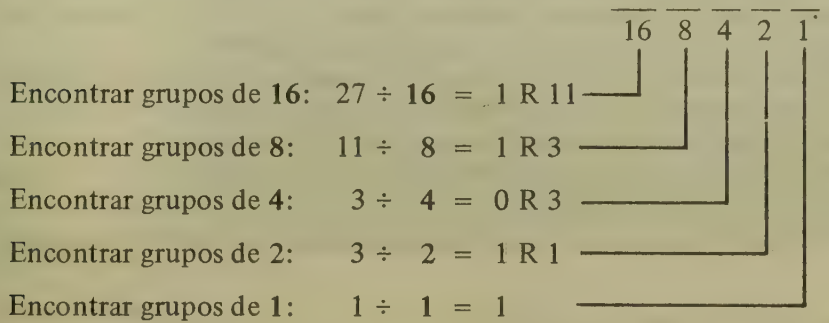
pone un "0" en cada una de estas tres posiciones. Hay un grupo de 2 en 2 ($2 \div 2 = 1$ R 0), de modo que se pone un "1" en la posición del 2. Ya que se ha "agotado" el 98 (es decir, el residuo es 0), se pone un "0" en la posición del 1. Así, se tiene $\frac{1}{64}\ \frac{1}{32}\ \frac{0}{16}\ \frac{0}{8}\ \frac{0}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{0}{1}$. Es decir, $98_{10} = 1100010_2$.

Ejemplo 3

Convertir 27_{10} a un numeral base 2.

Solución

Se marcan los dígitos del numeral base 2 con sus valores posicionales. Puesto que aún no se sabe cuáles son los dígitos, deben dejarse en blanco. No se necesita considerar valores mayores que 16. Se tiene:



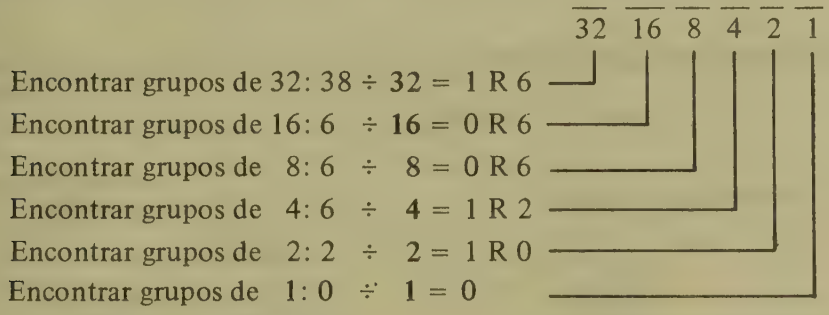
Por lo tanto, $27_{10} = 11011_2$.

Ejemplo 4

Convertir 38_{10} a un numeral base 2.

Solución

Se marcan los dígitos del numeral base 2. Los dígitos están en blanco, y considerar valores mayores que 32 no es necesario.



Por lo tanto, $38_{10} = 100110_2$.

Las conversiones de binario a decimal y de decimal a binario tienen mucho en común. Más adelante se estudiarán los sistemas de numeración octal (base 8) y exadecimal (base 16). La siguiente regla para realizar conversiones será de utilidad.

Para convertir un numeral a base 10 o de base 10:

1. Se marcan los dígitos del numeral no decimal con sus valores posicionales, inclusive cuando los dígitos de dicho numeral se dejen en blanco.
2. Si los dígitos del numeral no decimal se conocen (es decir, si no hay espacios), se multiplica cada dígito por su valor posicional. La suma de estos productos es el numeral base 10.
3. Si los dígitos del numeral no decimal están en blanco, se divide el numeral base 10 entre el valor posicional mayor que se haya marcado. El cociente es el dígito de la extrema izquierda del numeral que se busca. Se divide el residuo entre el siguiente valor posicional para obtener el siguiente dígito, y así sucesivamente.

Ejemplo 5

Convertir 101110_2 a un numeral base 10.

Solución

Se marcan los dígitos del numeral base 2.

$$\frac{1}{32}\ \frac{0}{16}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{0}{1}$$

Se conocen los dígitos, por lo que se tiene:

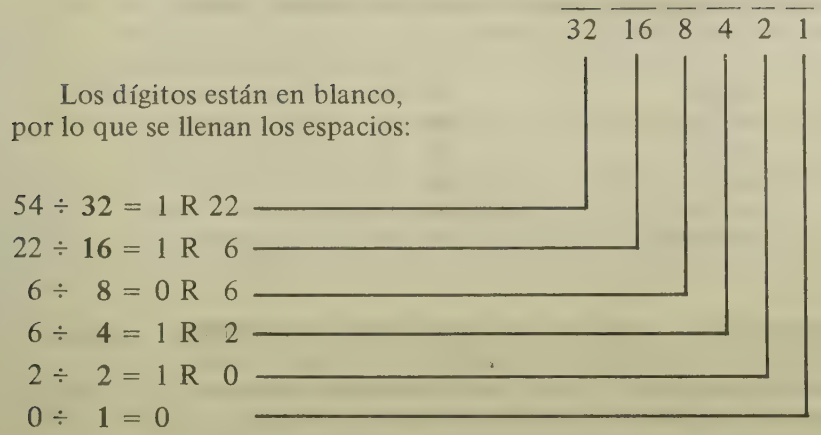
$$32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 0 \text{ o } 46_{10}.$$

Ejemplo 6

Convertir 54_{10} a un numeral base 2.

Solución

Se marcan los dígitos del numeral base 2:



Por lo tanto, $54_{10} = 110110_2$.

Ejemplo 7

Convertir 10101110_2 a un numeral base 10.

Solución

Se marcan los dígitos del numeral base 2.

$$\underset{128}{1}\ \underset{64}{0}\ \underset{32}{1}\ \underset{16}{0}\ \underset{8}{1}\ \underset{4}{1}\ \underset{2}{1}\ \underset{1}{0}.$$

Se conocen los dígitos, por lo que se tiene:

$$128 + 32 + 8 + 4 + 2 \text{ o } 174_{10}.$$

Ejercicios

Convertir los numerales binarios siguientes a numerales decimales. Ver los ejemplos 1, 2, 5 y 7.

1. 110	**2.** 101	**3.** 111
4. 1000	**5.** 1011	**6.** 1010
7. 1100	**8.** 1101	**9.** 110111
10. 100101	**11.** 111010	**12.** 101100
13. 100011	**14.** 11011011	**15.** 10010110
16. 10110011	**17.** 10111101	**18.** 10101001
19. 10111011	**20.** 11001100	

Convertir los numerales decimales siguientes a numerales binarios. Ver los ejemplos 3, 4 y 6.

21. 9	**22.** 16	**23.** 18
24. 22	**25.** 35	**26.** 41
27. 47	**28.** 52	**29.** 53
30. 59	**31.** 63	**32.** 65
33. 66	**34.** 79	**35.** 81
36. 96	**37.** 110	**38.** 128
39. 198	**40.** 240	

⇒**41.** Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para convertir un numeral binario cualquiera en un numeral decimal. (Sugerencia: Empezar con el bit de la extrema derecha y usar una estructura iterativa para duplicar cada valor posicional sucesivo.)

***42.** A continuación se presentan dos ejemplos del procedimiento para multiplicar, denominado "la multiplicación del campesino ruso". Se saca la mitad del primer número mientras es posible (se ignoran los residuos) en la primera columna, y el segundo número se duplica en la segunda columna. Cuando el número de la primera columna es par, se tacha el de la segunda. La suma de los números que quedan en la segunda columna es el producto de los dos números originales. Explicar por qué funciona este procedimiento:

Ejemplo: 13 × 21

13	21
~~6~~	~~42~~
3	84
1	168
	273

22 × 41

~~22~~	~~41~~
11	82
5	164
~~2~~	~~328~~
1	656
	902

***43.** Una computadora debe tener la capacidad de identificar caracteres alfabéticos y no alfabéticos así como números. Es necesario traducir los caracteres en un código utilizando 0 's y 1 's. Es conveniente que el código de los caracteres numéricos correspondan con sus valores binarios, pero es necesario entender que estos códigos no se utilizan para realizar operaciones aritméticas.

a. Escribir los dígitos 0 al 9 utilizando cuatro bits para cada uno.
b. ¿Cuántos caracteres más podrían representarse utilizando cuatro bits?
c. Si se utilizaran seis bits, ¿cuántos caracteres más podrían representarse?

*44. Un código de ocho bits (o de siete bits) de uso generalizado es el ASCII (siglas en inglés de Código Americano Estándar para Intercambio de Información), en el que

a. La representación con cuatro bits de un carácter numérico está precedida de 0011 (o 011).
b. Los caracteres de la letra A a la letra O están numerados en orden con A = 0001, y están precedidos de 0100 (o 100).
c. Los caracteres de la letra P a la letra Z están numerados en orden con P = 0000, y están precedidos de 0101 (o 101).

Escribir el código ASCII de ocho bits de los caracteres 0 al 9 y A a Z.

*45. Otro código de ocho bits es el EBCDIC (siglas en inglés de Código Ampliado de Intercambio de Decimales Codificados en Binario), en el que

a. La representación con cuatro bits de un carácter numérico está precedida de 1111.
b. Los caracteres de la letra A a la letra I están numerados en orden con A = 0001, y están precedidos de 1100.
c. Los caracteres de la letra J a la letra R están numerados en orden con J = 0001, y están precedidos de 1100.
d. Los caracteres de la letra S a la letra Z están numerados en orden con S = 0010, y están precedidos de 1110.

Escribir el código EBCDIC de los caracteres 0 al 9 y A a Z.

4.2. FRACCIONES BASE 2

En el sistema decimal las fracciones menores de 1 pueden escribirse utilizando el punto decimal. A la derecha del punto, cada valor posicional es una fracción con 1 como numerador y una potencia de 10 como denominador. En este punto se dejará de distinguir entre número y numeral; la palabra "número" se referirá tanto a los números como a los numerales. Considérese 3 614.6234. Si se marca cada dígito con su valor posicional, se tiene:

$$\frac{3}{1000}\ \frac{6}{100}\ \frac{1}{10}\ \frac{4}{1}\ \cdot\ \frac{6}{1/10}\ \frac{2}{1/100}\ \frac{3}{1/1\,000}\ \frac{4}{1/10\,000}$$

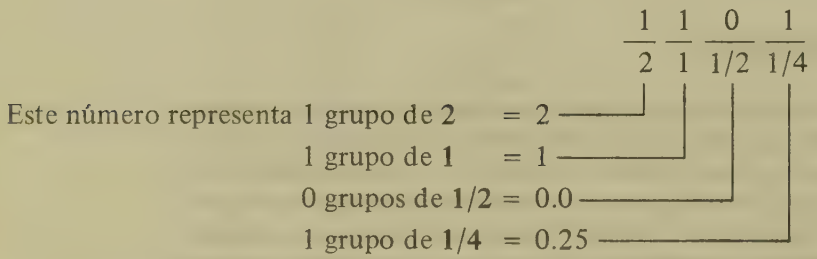
También es posible usar el sistema binario para escribir fracciones menores que 1. A la derecha del punto (llamado *punto binario*), cada valor posicional es una fracción con 1 como numerador y una potencia de 2 como denominador. En la tabla 4.1 se enlistan las potencias de 2.

Tabla 4.1

Potencias de 2

N	$(2)^N$	$(1/2)^N$
0	1	
1	2	0.5
2	4	0.25
3	8	0.125
4	16	0.0625
5	32	0.03125
6	64	0.015625
7	128	0.0078125
8	256	0.00390625
9	512	0.001953125
10	1024	0.0009765625
11	2048	0.00048828125
12	4096	0.000244140625
13	8192	0.0001220703125
14	16,384	0.00006103515625
15	32,768	0.000030517578125

Considérese 11.01_2. Si se marcan sus dígitos con sus valores posicionales, se tiene



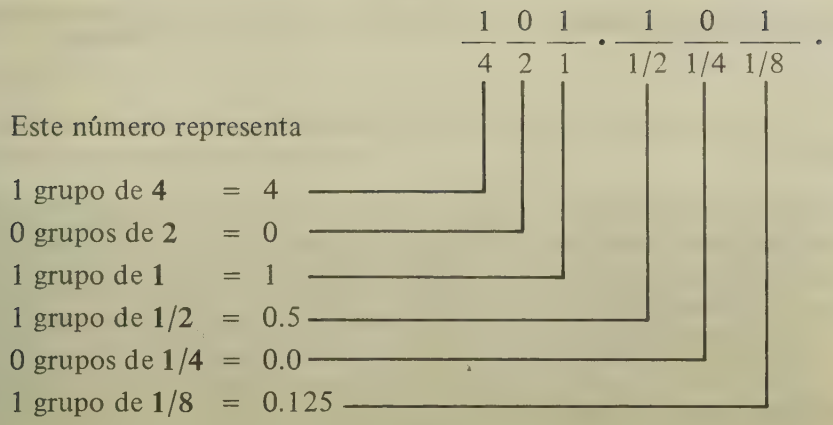
para un total de 3.25_{10}.

Ejemplo 1

Convertir 101.101_2 a base 10.

Solución

Se marcan los dígitos del número base 2 con sus valores posicionales:



para un total de 5.625_{10}.

Ejemplo 2

Convertir 11.00101_2 a base 10.

Solución

Se marcan los dígitos del número base 2 con sus valores posicionales:

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{1}\ .\ \frac{0}{1/2}\ \frac{0}{1/4}\ \frac{1}{1/8}\ \frac{0}{1/16}\ \frac{1}{1/32}$$

Este número representa $2 + 1 + 1/8 + 1/32 = 2 + 1 + 0.125 + 0.03125 = 3.15625_{10}$.

La conversión de fracciones en base 10 a fracciones base 2 puede hacerse utilizando los valores posicionales, pero, con frecuencia, el proceso aritmético es tedioso; en su lugar se aplica el algoritmo siguiente y en el capítulo 5 se indicará por qué funciona.

Para convertir una fracción decimal a una fracción binaria:

1. La fracción se multiplica por dos y se separa la parte entera del producto. El entero es el primer dígito a la derecha del punto binario.
2. La fracción decimal que queda se multiplica por dos y se separa el entero. Éste es el siguiente dígito a la derecha de la fracción binaria.
3. El paso dos se repite hasta que
   a. la fracción que queda es cero, o
   b. ocurre un patrón, periódico.

Convertir 0.1 a una fracción binaria. **Ejemplo 3**

Solución

Se multiplica por 2:

$0.1 \times 2 = 0.2$ El entero es 0.
$\mathbf{0.2} \times 2 = \mathbf{0.4}$ El entero es **0.**
$\mathbf{0.4} \times 2 = \mathbf{0.8}$ El entero es **0.**
$\mathbf{0.8} \times 2 = \mathbf{1.6}$ El entero es **1.**
$\mathbf{0.6} \times 2 = \mathbf{1.2}$ El entero es **1.**

con 0.2×2 se inicia un patrón periódico.

Los cuatro pasos indicados en negrita se repetirán. Obsérvese que el primer renglón no está incluido en el patrón periódico. Así, se tiene $0.1_{10} = 0.\overline{0011}_2$. La barra que está sobre los dígitos 0011 indica que este patrón se repite indefinidamente.

Convertir 0.75_{10} a una fracción binaria. **Ejemplo 4**

Solución

Se multiplica por 2:

$0.75 \times 2 = 1.5$ El entero es 1.
$0.5 \times 2 = 1.0$ El entero es 1.

La fracción que queda es 0, de modo que se ha llegado al final del proceso. Es decir, $0.75_{10} = 0.11_2$.

Convertir 0.35_{10} a una fracción binaria. **Ejemplo 5**

Solución

Se multiplica por 2:

$0.35 \times 2 = 0.7$ El entero es 0.
$0.7 \times 2 = 1.4$ El entero es 1.
$\mathbf{0.4} \times 2 = \mathbf{0.8}$ **El entero es 0.**
$\mathbf{0.8} \times 2 = \mathbf{1.6}$ **El entero es 1.**
$\mathbf{0.6} \times 2 = \mathbf{1.2}$ **El entero es 1.**
$\mathbf{0.2} \times 2 = \mathbf{0.4}$ **El entero es 0.**

con 0.4×2 se inicia un patrón periódico, de tal modo que $0.35_{10} = 0.010\overline{110}_2$.

Con frecuencia, los programadores usan algoritmos similares para convertir enteros de una base a otra.

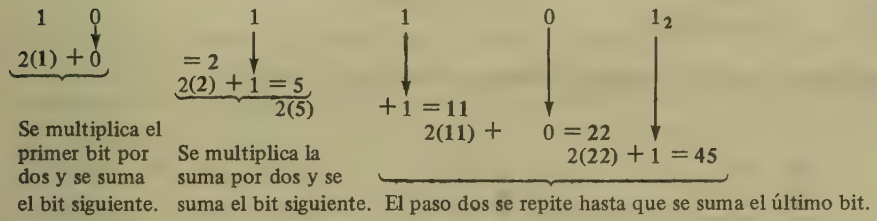
Para convertir un entero binario a un entero decimal:

1. Se multiplica por 2 el dígito de la extrema izquierda y se suma el dígito siguiente a la derecha.
2. La suma se multiplica por 2 y se suma el dígito siguiente.
3. Se repite el paso dos hasta que se haya sumado el último dígito. La suma es el entero decimal.

Convertir 101101_2 a un entero decimal. **Ejemplo 6**

Solución

Por claridad, se separan los bits del número.



Convertir 110101_2 a un entero decimal. **Ejemplo 7**

Solución

$2(1) + 1 = 3$
$2(3) + 0 = 6$
$2(6) + 1 = 13$
$2(13) + 0 = 26$
$2(26) + 1 = 53$ Por lo tanto, $110101_2 = 53_{10}$.

Para convertir un entero decimal a un entero binario:

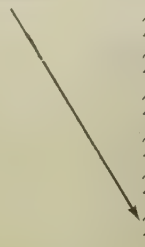
1. El entero decimal se divide entre 2 y se separa el residuo. Éste es el dígito correspondiente a las unidades del entero binario.
2. El cociente se divide entre 2 y se separa el residuo. Éste es el dígito siguiente a la izquierda en el entero binario.
3. El paso dos se repite hasta que el cociente sea cero.

Convertir 45_{10} a un entero binario.

Ejemplo 8

Solución

Se empieza aquí



$$
\begin{array}{rl}
0 & \text{R } 1 \\
2\overline{)\ 1} & \text{R } 0 \\
2\overline{)\ 2} & \text{R } 1 \\
2\overline{)\ 5} & \text{R } 1 \\
2\overline{)\ 11} & \text{R } 0 \\
2\overline{)\ 22} & \text{R } 1 \\
2\overline{)\ 45} &
\end{array}
$$

Los residuos se leen de arriba a abajo para obtener el entero binario 101101.

Ejercicios

Convertir los siguientes números binarios a números decimales. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. 11.011	**2.** 10.0101	**3.** 11.0011
4. 110.0101	**5.** 110.0111	**6.** 110.01001
7. 110.10001	**8.** 101.00011	

Convertir los siguientes números decimales a números binarios. Ver los ejemplos 3 al 5.

9. 0.3	**10.** 0.25	**11.** 0.35
12. 0.7	**13.** 0.225	**14.** 7.625
15. 8.375	**16.** 17.875	

Convertir los siguientes números decimales a binarios. Ver el ejemplo 8.

23. 34	**24.** 65	**25.** 79
26. 122	**27.** 185	**28.** 544

Convertir los siguientes números binarios a decimales. Ver los ejemplos 6 y 7.

17. 110111	**18.** 100101	**19.** 101101
20. 111100	**21.** 100100	**22.** 101111

* **29.** Después de que una computadora recibe datos y los traduce a un código tal como el ASCII o el EBCDIC (ver los ejercicios 4.1, problemas 44 y 45), los datos numéricos deben pasar por una traducción más al sistema de números binarios antes de que se realicen los cálculos.

a. Escribir 17 utilizando el código ASCII y escribirlo como un número binario.

b. Escribir 32 utilizando el código EBCDIC y escribirlo como un número binario.

⇒**30.** Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para convertir una fracción binaria a una fracción decimal.

4.3. ARITMÉTICA BINARIA

Ahora que se ha visto cómo la computadora convierte un numeral en binario, el paso siguiente es saber cómo se realizan los cálculos en binario. En la sección 2.4 se vieron las tablas de sumar y multiplicar en base 10. Las tablas correspondientes en base 2 son mucho más breves (ver las tablas 4.2 y 4.3).

Tabla 4.2

Tabla de adición binaria

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabla 4.3

Tabla de multiplicación binaria

×	0	1
0	0	0
1	0	1

La única cifra que difiere del cálculo en base 10 es el resultado de $1 + 1 = 10$. A primera vista parece extraño, pero recuérdese que 10_2 representa 2_{10}, que es exactamente el resultado que se esperaría cuando se suma $1 + 1$. La adición binaria de números más grandes se hace columna por columna.

Para sumar números binarios:

1. Se alinean los puntos binarios.
2. Se suma columna por columna, considerando el acarreo de ser necesario (es decir, si se lleva una unidad del valor posicional inmediato).

Ejemplo 1

En los ejemplos que siguen se omiten los subíndices. Todos los cálculos se refieren al sistema binario.

Efectuar la siguiente suma binaria: $1010 + 111$.

Solución

Se alinean los puntos binarios. Se sobreentiende que el punto está al final de estos dos números.

```
1  1  1
   1  0  1  0
+     1  1  1
-------------
1  0  0  0  1
```

0 + 1 = 1

1 + 1 = 10; se escribe 0 y se anota un acarreo de 1 en la columna siguiente.

1 + 1 = 10; se escribe 0 y se anota un acarreo de 1 en la columna siguiente.

1 + 1 = 10; se escribe 0 y se anota un acarreo de 1 en la columna siguiente.

Ejemplo 2

Efectuar la siguiente suma binaria: 1010.11 + 101.011.

Solución

Se alinean los puntos binarios y se hace la suma columna por columna.

```
1  1  1  1  1     1
   1  0  1  0  .  1  1
+     1  0  1  .  0  1  1
-----------------------
1  0  0  0  0  .  0  0  1.
```

En un problema muy largo pueden encontrarse varios 1 en una columna. La propiedad asociativa es útil en tales casos:

$$1 + 1 + 1 = (1 + 1) + 1 =$$
$$10 + 1 = 11.$$

Para cuatro 1,

$$1 + 1 + 1 + 1 = (1 + 1) + (1 + 1) =$$
$$10 + 10 = 100.$$

Ejemplo 3

Efectuar la siguiente suma binaria: 1011 + 111.

Solución

Se alinean los puntos binarios y se hace la suma columna por columna.

```
1  1  1  1
   1  0  1  1
   +  1  1  1
-------------
1  0  0  1  0
```

1 + 1 = 10
1 + 1 + 1 = 11
1 + 1 = 10
1 + 1 = 10.

Ejemplo 4

Efectuar la siguiente suma binaria: 1110.01 + 110.10.

Solución

Se alinean los puntos binarios y se hace la suma columna por columna.

```
1  1  1
   1  1  1  0  .  0  1
+     1  1  0  .  1  0
-----------------------
1  0  1  0  0  .  1  1
```

1 + 1 = 10
1 + 1 + 1 = 11
1 + 1 = 10.

Cuando se tienen cuatro o más 1 en una sola columna, puede resultar conveniente distribuir el acarreo en las dos columnas siguientes. (Podría hacerse lo mismo en base 10, pero los números rara vez son lo suficientemente grandes como para recurrir a este procedimiento.)

Ejemplo 5

Efectuar la siguiente suma binaria: 1011 + 111 + 10.

Solución

```
1   "1  0"  1
      1  0    1  1
         1    1  1
            +  1  0
-------------------
1     0  1     0  0
```

1 + 1 = 10
1 + 1 + 1 + 1 = 100; se escribe 0 y se anota un acarreo de 10 en las dos columnas siguientes
1 + 1 = 10.

Efectuar la siguiente suma binaria: 1011.01 + 11.11 + 10.01.

Ejemplo 6

Solución

```
1  "1  0"  1  1     1
     1  0  1  1  .  0  1
           1  1  .  1  1
     +     1  0  .  0  1
-----------------------
1   0  0   0  1  .  0  1
```

1 + 1 + 1 = 11

1 + 1 + 1 = 11

1 + 1 + 1 + 1 = 100; se escribe 0 y se anota un acarreo de 10.

La sustracción se realiza de manera similar a la resta en base 10.

Para restar números binarios:

1. Se alinean los puntos binarios.
2. Se resta columna por columna, considerando el acarreo negativo si es necesario. En los acarreos negativos, recuérdese que 10 − 1 = 1 en base 2.

Efectuar la siguiente resta binaria: 1011 − 10.

Ejemplo 7

Solución

```
1  0  1  1
−     1  0
-----------
1  0  0  1
```

1 − 0 = 1

1 − 1 = 0

0 queda en esta columna

1 queda en esta columna.

Efectuar la siguiente resta binaria: 1010.01 − 101.01.

Ejemplo 8

Solución

```
0  10  0  10
1   0  1   0 . 0 1
−   1  0   1 . 0 1
-------------------
    1  0   1 . 0 0
```

1 − 1 = 0
0 − 0 = 0
0 − 1 requiere un acarreo negativo;
10 − 1 = 1
0 − 0 = 0
0 − 1 requiere un acarreo negativo;
10 − 1 = 1.

Ejemplo 9

Efectuar la siguiente resta binaria: 1101.01 − 110.1.

Solución

```
0  10
     0  10  0      10
1    1   0  1 .     0  1
−    1   1  0 .     1
-----------------------
     1   1  0 .     1  1
```

0 − 1 requiere un acarreo negativo
0 − 1 requiere un acarreo negativo
0 − 1 requiere un acarreo negativo

Para multiplicar en el sistema binario, el problema se plantea como si se tratara del sistema base 10. Es necesario verificar que la suma de los productos parciales se hace en base 2.

Ejemplo 10

Efectuar la multiplicación binaria 110.1 × 101.

Solución

```
          1  1  0 . 1
             1  0   1
-------------------------
          1  1  0     1  − se multiplica por el 1 de la derecha
       0  0  0  0        − se deja un espacio y se multiplica por 0
    1  1  0  1           − se multiplica por el 1 de la izquierda
-------------------------
1  0  0  0  0  0 . 1  − se suman los productos parciales y se
                        cuenta un lugar binario.
```

Efectuar la multiplicación binaria 11.10 × 100.

Ejemplo 11

Solución

```
1 1 . 1 0
×         1   0 0 — los 0 finales se dejan "colgando"
-----------------
1 1   1 0 . 0 0 — se bajan los 0 y se multiplica por 1; se
                  cuentan dos lugares binarios.
```

En el sistema decimal la división es la operación básica más difícil de aprender. Sin embargo, en el sistema binario no es necesario suponer que si 16 cabe en 97 seis o siete veces. Las únicas opciones son 1 y 0. El divisor cabe en el dividendo (1) o no cabe (0).

Efectuar la división binaria 1010 ÷ 10.

Ejemplo 12

Solución

1 ÷ 10 = 0, y se deja en blanco la primera posición

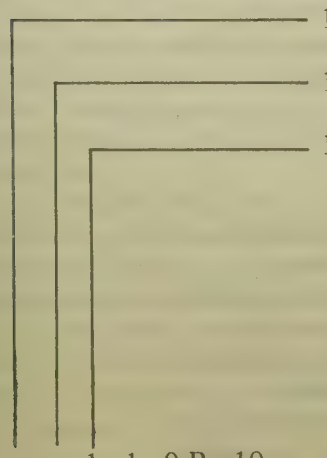
10 ÷ 10 = 1, y se pone un 1 sobre el 10

```
          1 0 1
10)     1 0 1 0
      − 1 0         − 1 × 10 = 10; se resta y se baja el dígito
                                   siguiente
            1       − 1 ÷ 10 =  0, y se pone 0 enseguida en el
                                   cociente
          − 0       − 0 × 10 =  0; se resta y se baja el dígito
                                   siguiente
            1 0     −10 ÷ 10 =  1, y se pone 1 enseguida en el
                                   cociente
          − 1 0     − 1 × 10 = 10; se resta
              0     − el residuo es 0.
```

Efectuar la división binaria 10100 ÷ 11.

Ejemplo 13

Solución



1 ÷ 11 = 0, y se deja esta posición en blanco

10 ÷ 11 = 0, y se deja esta posición en blanco

101 ÷ 11 = 1, y se pone 1 sobre el 101

1 1 0 R 10

```
11) 1 0 1 0 0
    - 1 1
    -------
      1 0 0
      - 1 1
      -------
          1 0
          - 0
          -----
           10
```

– 1 × 11 = 11; se resta y se baja el dígito siguiente

– 100 ÷ 11 = 1; y se pone 1 enseguida en el cociente

– 1 × 11 = 11; se resta y se baja el dígito siguiente

– 10 ÷ 11 = 0, y se pone 0 enseguida en el cociente

– 0 × 11 = 0; se resta

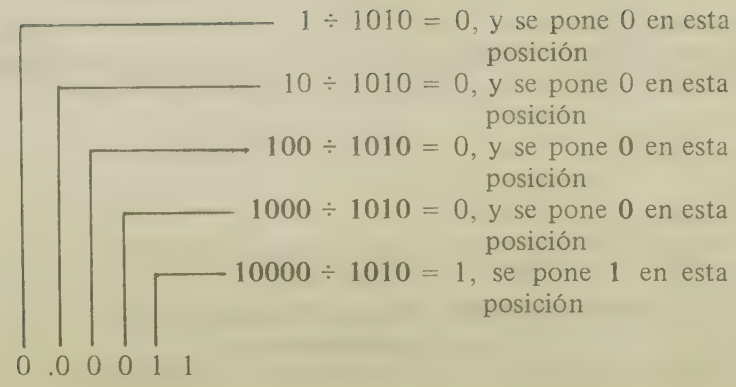
– el residuo es 10.

Efectuar la división binaria 1 ÷ 1010.

Ejemplo 14

Solución

Puesto que 1010 no cabe en 1, se usa el punto binario y se agregan ceros.




```
1 0 1 0) 1 .0 0 0 0 0
       −  1 0 1 0
          1 1 0 0
        − 1 0 1 0
              1 0 0
```

− 1 × 1010 = 1010; se resta, se baja el dígito siguiente

− **1100 ÷ 1010 = 1**, y se pone 1 enseguida en el cociente

− 1 × 1010 = 1010; se resta, se baja el dígito siguiente

− en este punto los pasos de la división indicados en negrita empiezan a repetirse; los cuatro dígitos siguientes serán 0011.

Si el ejemplo 14 se convierte a un problema decimal, se tiene $1 \div 10$. Por tanto, se ve que 0.1_{10} es una fracción binaria periódica. Es decir, $0.1_{10} = 0.\overline{0011}_2$, donde el patrón 0011 se repite de manera indefinida. Las fracciones binarias periódicas pueden causar situaciones inesperadas en programas de computadora. Por ejemplo, considérese lo que ocurriría si se corriera el algoritmo siguiente en una computadora.

```
Asignar a X un valor 0.
Asignar a CTR un valor 0.
Mientras CTR sea menor que 10,
    Sumar 0.1 a X.
    Sumar 1 a CTR.
    FIN MIENTRAS

Si X = 1, entonces presentar el mensaje "UNO."
    En caso contrario, presentar el mensaje "NO UNO."
    FIN SI
```

La computadora calcularía

$$X = 0 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1$$

Uno esperaría obtener un valor de X igual a 1 después de realizar estas sumas, pero éste es 1.000000119209. El número decimal 0.1 se convierte a binario redondeándolo a un número finito de cifras fraccionarias binarias. El error introducido por el redondeo de este número binario sufre una composición en la ejecución del programa cuando 0.1 se suma diez veces. Cuando el valor de X se compara con 1, los números no son iguales, y la computadora presentaría el mensaje "NO UNO."

Tales discrepancias son comunes en los cálculos realizados por computadora debido a que la representación binaria de un número puede no ser exacta, aun cuando la representación decimal lo sea. Cuando la representación binaria es exacta, no ocurre discrepancia alguna. Si las líneas tercera y cuarta del algoritmo se cambiaran por "Mientras CTR sea menor que 8, sumar 0.125 a X", el resultado sería "UNO". El número que se estaría sumando sería 1/8 = 0.125, que es exactamente 0.001 en el sistema binario.

Ejercicios

Efectuar las sumas siguientes utilizando aritmética binaria. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. 1101 + 101
2. 1011 + 110
3. 110.01 + 11.011
4. 100.1 + 1.11
5. 110.101 + 11.01
6. 101.011 + 10.11

Efectuar las sumas siguientes utilizando aritmética binaria. Ver los ejemplos 3 al 6.

7. 1001 + 110 + 101
8. 1011 + 111 + 11
9. 10111.011 + 1100.1 + 110.01 + 11
10. 11011.01 + 1011.1 + 1001 + 101.001

Efectuar las restas siguientes utilizando aritmética binaria. Ver los ejemplos 7 al 9.

11. 1110 − 101
12. 1001 − 111
13. 10.1011 − 1.0110
14. 1.1011 − 0.0101
15. 101.01 − 11.11
16. 10.001 − 0.11
17. 101.101 − 0.011
18. 10.00 − 1.01
19. 100 − 1.01
20. 1000 − 1.11

Efectuar las multiplicaciones siguientes utilizando aritmética binaria. Ver los ejemplos 10 y 11.

21. 111 × 11	**22.** 110 × 11
23. 1.01 × 1.1	**24.** 101 × 101
25. 10.1 × 0.01	**26.** 11.1 × 1.01
27. 10.11 × 1.01	**28.** 10.01 × 0.011
29. 110.1 × 1.011	**30.** 101.1 × 10.01

Efectuar las divisiones siguientes utilizando aritmética binaria. Ver los ejemplos 12 y 13.

31. 1100 ÷ 11	**32.** 1110 ÷ 10
33. 10100 ÷ 100	**34.** 10101 ÷ 111
35. 1111 ÷ 10	**36.** 1001 ÷ 10
37. 1010 ÷ 11	**38.** 100010 ÷ 101
39. 101001 ÷ 110	**40.** 110000 ÷ 111

***41.** Un número es palindrómico cuando sus dígitos se leen igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, tal como 15651. Dar un ejemplo que sea palindrómico:

(a) cuando se escribe en decimal, pero no en binario.
(b) cuando se escribe en binario, pero no en decimal.
(c) cuando se escribe tanto en decimal como en binario.

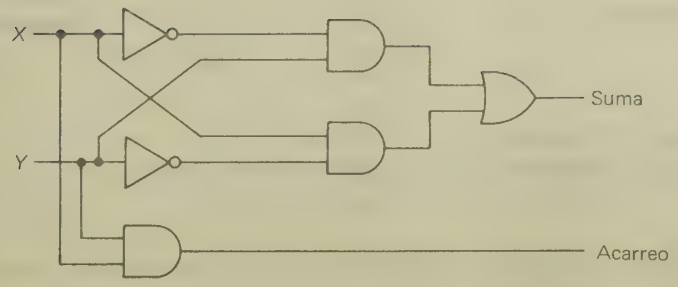
***42.** Elegir un número decimal que no sea palindrómico. Invertir los dígitos y sumarlos al número original. Repetir el procedimiento con el número resultante hasta obtener un número palindrómico.

Ejemplo:
```
   57  (número)
+  75  (dígitos invertidos)
  ---
  132  (suma)
+ 321  (dígitos invertidos)
  ---
  363  (número palindrómico).
```

Dar un ejemplo que sea palindrómico:

(a) en menos pasos cuando se escribe en decimal que en binario.
(b) en menos pasos cuando se escribe en binario que en decimal.
(c) en el mismo número de pasos si se escribe en binario o en decimal.

***43.** Considérese el diagrama lógico llamado *semisumador*. Para todas las entradas posibles, determinar el resultado de las dos trayectorias, la de la suma y la del acarreo. ¿Concuerdan los resultados con la adición binaria según se presenta en la tabla 4.2?



4.4. ARITMÉTICA DE COMPLEMENTOS

Una de las primeras máquinas calculadoras fue un dispositivo mecánico construido por Blaise Pascal en el siglo XVII. Él utilizó el concepto de sustracción por complementos. Se considerará esta técnica en base 10 utilizando números de seis dígitos, tal como lo hizo Pascal. Se aplicó el mismo método en las computadoras para realizar las restas en el sistema binario.

Puesto que se están usando números de seis dígitos, si un número no tiene seis dígitos, simplemente se agregan tantos ceros a la izquierda como sean necesarios para ajustar esta cifra.

Definición

El complemento de un número decimal de seis dígitos x es $1\,000\,000 - x$.

El complemento de 000107 es 1 000 000 − 000107. Si se resta y se suma 1 a la vez, se ha sumado cero, el elemento neutro aditivo, de modo que se tiene:

$$1\,000\,000 - 1 - 000\,107 + 1.$$

Pero $1\,000\,000 - 1 = 999\,999$, por lo que se tiene $999\,999 - 000\,107 + 1 = 999\,893$. Aun cuando en la práctica una sustracción no se haría de este modo, es conveniente usarla en las restas realizadas por medio de máquinas, ya que evita el uso de acarreos negativos. Se necesita saber que $1\,000\,000 - 1 = 999\,999$, pero esta parte del procedimiento es igual en todos los problemas, y la máquina no tiene que programarse para considerar acarreos negativos.

Encontrar el complemento de 113. **Ejemplo 1**

Solución

El complemento de 113 es	1 000 000	− 000 113.	
Se resta y se suma 1:	1 000 000 − 1	− 000 113 + 1.	
Se sustituye (1 000 000 − 1) por 999 999:	999 999	− 000 113 + 1.	
Se efectúa la resta sin acarreo negativo:	999 886		+ 1.
El complemento de 000 113 es	999 887.		

Encontrar el complemento de 789. **Ejemplo 2**

Solución

El complemento de 789 es:	1 000 000	− 000 789.	
Se resta y se suma 1:	1 000 000 − 1	− 000 789 + 1.	
Se sustituye (1 000 000 − 1) por 999 999:	999 999	− 000 789 + 1.	
Se efectúa la resta sin acarreo negativo:	999 210		+ 1.
El complemento de 000789 es	999 211.		

En lugar de restar un número, puede sumarse su complemento.

Así, $\begin{array}{r} 000140 \\ \underline{-000113} \end{array}$ es lo mismo que $\begin{array}{r} 000140 \\ \underline{+999887} \end{array}$, ya que 999887 es el complemento 000113 (ver el ejemplo 1).

Puesto que el complemento de x es $1\,000\,000 - x$, cuando se suma el complemento de x a un número, se está sumando 1 000 000 de más. Si después se resta 1 000 000 (simplemente eliminando el 1 inicial), se tiene la respuesta correcta con seis dígitos de la sustracción original.

Efectuar la resta sumando el complemento: 000140 − 000113. **Ejemplo 3**

Solución

Puesto que el complemento de 000113 = 999 887 (ver el ejemplo 1),

$$\begin{array}{r} 000140 \\ -\ 000113 \\ \hline \end{array} \quad \text{es lo mismo que} \quad \begin{array}{r} \mathbf{1111} \\ 000140 \\ +\ 999887 \\ \hline 000027 \end{array}$$

donde el 1 del acarreo en la columna de la extrema izquierda se elimina.

Efectuar la resta sumando el complemento: 001259 − 000789.

Ejemplo 4

Solución

Puesto que el complemento de 000789 = 999211 (ver el ejemplo 2),

$$\begin{array}{r} 001259 \\ -\ 000789 \\ \hline \end{array} \quad \text{es lo mismo que} \quad \begin{array}{r} \mathbf{11\ \ 1} \\ 001259 \\ +\ 999211 \\ \hline 000470 \end{array}$$

donde el 1 del acarreo en la columna de la extrema izquierda se elimina.

En los ejemplos anteriores se usaron números de seis dígitos. Sin embargo, los mismos principios se aplican para cualquier número de dígitos n, si se usa $10^n - x$ como el complemento de x. Para números binarios se usarán ocho bits.

Definición

El complemento de un número binario de ocho bits x es

$$100000000 - x.$$

El complemento de 00010011 es	100000000	− 00010011.
Se resta y se suma 1:	100000000 − 1	− 00010011 + 1.
Se sustituye (100000000 − 1) por 11111111:	11111111	− 00010011 + 1.

(Esto ocurre en todos los problemas.)
Se efectúa la resta sin acarreo negativo: 11101100 + 1.
El complemento de 00010011 es 11101101 .

Examínense los renglones cuarto y quinto del ejemplo anterior. En base 2; al tomarse 11111111 − x simplemente los 1 cambian a 0 y los 0 a 1. En adelante se hará uso de este hecho y se omitirán los pasos realizados en los tres renglones iniciales. El último paso es sumar 1. Al número resultante se le conoce como el complemento a dos. (El número obtenido antes de sumar 1 se denomina el complemento a uno; también es posible desarrollar un método para restar utilizándolo. Sin embargo, el complemento a dos es el que se usa generalmente en las computadoras.)

Para encontrar el complemento a dos de un número binario:

1. Se cambian los 1 por 0 y los 0 por 1.
2. Se suma 1.

Encontrar el complemento a dos de 00010011.

Ejemplo 5

Solución

Se cambian los dígitos: 11101100
Se suma 1: 11101101.

Encontrar el complemento a dos de 01011010.

Ejemplo 6

Solución

Se cambian los dígitos: 10100101.
Se suma 1: 10100110.

En el sistema binario, como en el decimal, un problema de sustracción puede sustituirse por uno de adición equivalente utilizando la aritmética de complementos.

Para restar números binarios utilizando aritmética de complementos:

1. El sustraendo se sustituye (el número que va a restarse) por su complemento.
2. Este complemento se suma al minuendo (el número del que el sustraendo se resta).

Ejemplo 7

Efectuar la resta binaria utilizando el çomplemento a dos:

$$01111100 - 00010011.$$

Solución

Se encuentra el complemento de 00010011:

$$11101100 + 1 + 11101101.$$

$$\begin{array}{r} 01111100 \\ -\ 00010011 \\ \hline \end{array} \quad \text{es lo mismo que} \quad \begin{array}{r} 11111 \\ 01111100 \\ +\ 11101101 \\ \hline \end{array}$$

(el complemento de 00010011) 01101001 donde el 1 del acarreo en la columna de la extrema izquierda se elimina.

Ejemplo 8

Efectuar la resta binaria utilizando el complemento a 2:

$$01101101 - 01011011.$$

Solución

Se encuentra el complemento de 01011011:

$$10100100 + 1 = 10100101.$$

$$\begin{array}{r} 01101101 \\ -\ 01011011 \\ \hline \end{array} \quad \text{es lo mismo que} \quad \begin{array}{r} 11\ 11\ 1 \\ 01101101 \\ +\ 10100101 \\ \hline \end{array}$$

(el complemento de 01011011) 00010010 donde el 1 de la columna de la extrema izquierda se elimina.

Ejercicios

Encontrar el complemento a 2 de los siguientes números binarios. Ver los ejemplos 5 y 6.

1. 01001010
2. 00111011
3. 01100110
4. 00010001
5. 00000001
6. 11111111
7. 10110101
8. 11000100
9. 11100111
10. 10100110

Efectuar las restas siguientes utilizando aritmética de complementos. Ver los ejemplos 7 y 8.

11. 01110110 − 00001001
12. 00111100 − 00000111
13. 01011011 − 00111011
14. 01101101 − 00101101
15. 01001001 − 00010110
16. 01000000 − 00000001
17. 01010101 − 00101010
18. 01010111 − 00111000
19. 01110111 − 00011011
20. 01001010 − 00000101

Resolver los problemas siguientes por acarreo negativo. Ver los problemas 7 al 9 de la sección 4.3.

21. 01110110 − 00001001. Comparar con el problema 11.
22. 00111100 − 00000111. Comparar con el problema 12.
23. 01011011 − 00111011. Comparar con el problema 13.
24. 01101101 − 00101101. Comparar con el problema 14.
25. 01001001 − 00010110. Comparar con el problema 15.

Resolver los problemas siguientes haciendo la conversión a base 10 antes de efectuar la resta.

26. 01000000 − 00000001. Comparar con el problema 16.
27. 01010101 − 00101010. Comparar con el problema 17.
28. 01010111 − 00111000. Comparar con el problema 18.
29. 01110111 − 00011011. Comparar con el problema 19.
30. 01001010 − 00000101. Comparar con el problema 20.

*31. La sustracción puede realizarse por otros métodos además del acarreo negativo y el uso de complementos. En los cuatro ejemplos siguientes se ilustra uno de ellos.

$$\begin{array}{rrr} 4 & {}^{6}\not{7} & 3 \\ -3 & 2 & {}^{3}\not{7} \\ \hline 1 & 4 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} {}^{3}\not{4} & 0 & 5 \\ -2 & {}^{5}\not{8} & 3 \\ \hline 1 & 5 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} {}^{5}\not{6} & {}^{0}\not{1} & 4 \\ -2 & {}^{1}\not{9} & {}^{2}\not{8} \\ \hline 3 & 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} {}^{2}\not{3} & 0 & 2 \\ -1 & {}^{2}\not{3} & {}^{4}\not{6} \\ \hline 1 & 2 & 6 \end{array}$$

(a) Explicar cómo se efectúa la resta con este método.
(b) Explicar por qué funciona.
(c) Intentar aplicarlo con números binarios.

4.5. NÚMEROS NEGATIVOS

Se han usado 0 y 1 para representar números positivos; también es posible escribir números negativos utilizando sólo 0 y 1, y en la sección anterior se vio que es posible restar un número sumando su complemento. Este procedimiento es similar al de restar números con signo: para restar un número se suma su recíproco. Esta relación entre sustracción y números negativos permite que éstos puedan representarse si se utiliza el complemento a 2.

Para escribir un número negativo en base 2:

1. Se escribe su valor absoluto en base 2.
2. Se encuentra el complemento a dos del valor absoluto.

Ejemplo 1

Escribir -59 como un número binario de ocho bits.

Solución

Se escribe 59 en binario: $59_{10} = 0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1_2$. Se encuentra el complemento de 59: $1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0 + 1 = 1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1$. Por lo tanto, $-59_{10} = 1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1_2$.

Ejemplo 2

Escribir -83 como un número binario de ocho bits.

Solución

Se escribe 83 en binario: $83_{10} = 0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1_2$. Se encuentra el complemento de 83: $1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0 + 1 = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1$. Por lo tanto, $-83_{10} = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1_2$.

Por el ejemplo 1 se sabe que $-59_{10} = 11000101_2$. Pero también es necesario poder determinar que $11000101_2 = -59_{10}$ y no $128 + 64 + 4 + 1 = 197_{10}$. El primer dígito (el de la extrema izquierda) se usa para indicar el signo. Un 0 indica un número positivo, un 1 indica un número negativo. Para convertir un número de base 2 a base 10, primero se evalúa el bit del signo. Si es 0, el número se evalúa con

base en sus valores posicionales. Si es 1, el número es negativo y por consiguiente es el complemento de un número positivo. Antes de que puedan evaluarse los valores posicionales, es necesario saber cuál es el número positivo. Puesto que el negativo de un negativo es positivo, se toma el complemento del complemento para obtener el positivo.

Para evaluar números con signo:

1. Si el primer bit (el de la extrema izquierda) es 0, se evalúan los valores posicionales. El número es positivo.
2. Si el primer bit es 1, se encuentra el complemento del número y se evalúan sus valores posicionales. El número es negativo.

Ejemplo 3

Convertir 11000101_2 a base 10.

Solución

Puesto que el primer bit es 1, el número es negativo. Se encuentra su complemento: 00111010 + 1 = 00111011. Este número binario representa $32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59_{10}$. Por lo tanto,

$$1100010_2 = -59_{10}.$$

Ejemplo 4

Convertir 10100100_2 a base 10.

Solución

Puesto que el primer bit es 1, el número es negativo. Se encuentra su complemento; 01011011 + 1 = 01011100. Este número binario representa $64 + 16 + 8 + 4 = 92_{10}$. Por lo tanto,

$$10100100_2 = -92_{10}.$$

Ejemplo 5

Convertir 01000101_2 a base 10.

Solución

Puesto que el primer bit es 0, se sabe que el número es positivo. Se evalúan sus valores posicionales. El número representa:

$64 + 4 + 1 = 69_{10}$. Por lo tanto, $01000101_2 = 69_{10}$.

Las computadoras pueden operar con números mucho más grandes de los que pueden escribirse con ocho bits. Aquí se usaron ocho bits para simplificar los ejemplos. Si se usan dieciséis bits, como es común en las microcomputadoras, es posible escribir 32 768 números positivos: 0000000000000000_2 a 0111111111111111_2 (i. e., de 0_{10} a $32\,767_{10}$). También es posible escribir 32 768 números negativos: 1111111111111111_2 a 1000000000000000_2 (de -1_{10} a $-32\,768_{10}$).

En un problema de aritmética de enteros, todos los operandos individuales pueden pertenecer al conjunto de los enteros dentro del rango $-32\,768$ a $32\,767$, pero este conjunto no es cerrado para la adición, la sustracción, la multiplicación o la división. Cuando la suma, la diferencia o el producto de dos enteros sale de este rango, la computadora presenta un mensaje de error. Con frecuencia se usa la palabra sobreflujo para describir la ocurrencia de un resultado fuera del conjunto de valores permitidos. La división de enteros no producirá un mensaje de error, ya que se realiza según se describió en la sección 2.8.

Al efectuar operaciones aritméticas con números con signo, es importante usar el mismo número de bits en todo el problema. El resultado también tendrá el mismo número de bits. Se seguirán considerando sólo ocho bits aquí. En caso de que se presentara un "acarreo" en la novena columna, simplemente se omitirá en la respuesta final.

Para sumar enteros decimales utilizando aritmética binaria:

1. Se escribe cada número como un número binario de ocho bits.
2. Se efectúa la suma, omitiendo los acarreos en la novena posición.
3. El número de ocho bits resultante es la suma.

Ejemplo 6

Efectuar la suma decimal $-59 + 83$ en el sistema binario. Verificar la respuesta comparándola con el resultado esperado.

Solución

$$\begin{aligned} -59_{10} &= 11000101_2 \text{ (ver el ejemplo 1).} \\ 83_{10} &= \underline{01010011_2} \text{ (ver el ejemplo 2).} \end{aligned}$$

La suma es 00011000_2. Se omite el acarreo de la novena columna.

Verificación: Este número es positivo. Representa $16 + 8 = 24_{10}$. Puesto que $-59_{10} + 83_{10} = 24_{10}$, la respuesta es correcta.

Ejemplo 7

Efectuar la suma decimal 35 + (−66) en el sistema binario. Verificar la respuesta comparándola con el resultado esperado.

Solución

$35_{10} = 00100011_2$. $66_{10} = 01000010_2$.
Por lo tanto, $-66_{10} = \underline{10111110_2}$, el complemento de 66_{10}.

La suma es 11100001_2.

Verificación: El número es el negativo de $00011111_2 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31_{10}$. Es decir, $11100001_2 = -31_{10}$. Puesto que $35_{10} + (-66_{10}) = -31_{10}$, la respuesta es correcta.

Ejemplo 8

Efectuar la suma decimal −25 + (−13) en el sistema binario. Verificar la respuesta comparándola con el resultado esperado.

Solución

$25_{10} = 00011001_2$; así, $-25_{10} = 11100111_2$.
Puesto que $13_{10} = 00001101_2$, $-13_{10} = 11110011_2$.
Por tanto, se tiene $-25_{10} = 11100111_2$.
$-13_{10} = \underline{11110011_2}$.

La suma es 11011010_2.

Verificación: El número es el negativo de $00100110_2 = 32 + 4 + 2 = 38_{10}$. Es decir, $11011010_2 = -38_{10}$. Puesto que $-25_{10} + (-13_{10}) = -38_{10}$, la respuesta es correcta.

Ejercicios

Escribir los números siguientes como números binarios de ocho bits. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. 37	**2.** −37	**3.** 45
4. −45	**5.** 52	**6.** −52
7. 78	**8.** −78	**9.** 91
10. −91	**11.** 123	**12.** −123

Escribir los números siguientes como números decimales. Ver los ejemplos 3 al 5.

13. 00101101	**14.** 11010011	**15.** 00110110
16. 11001010	**17.** 01010101	**18.** 00110011
19. 10011001	**20.** 11100011	**21.** 10101010
22. 10000000	**23.** 11111111	**24.** 00010001

Efectuar las adiciones decimales siguientes en el sistema binario. Usar ocho bits. Verificar las respuestas haciendo la conversión a decimal. Ver los ejemplos 6 al 8.

25. $-26+34$	**26.** $26+(-34)$	**27.** $-26+(-34)$
28. $26+34$	**29.** $45+21$	**30.** $-45+21$
31. $45+(-21)$	**32.** $-45+(-21)$	**33.** $-17+32$
34. $17+32$	**35.** $-17+(-32)$	**36.** $17+(-32)$

⇒**37.** Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para convertir un número decimal con signo x ($-128 \leqslant x \leqslant 127$) a un número binario de ocho bits.

⇒**38.** Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para convertir un número binario de ocho bits con signo en un número decimal.

4.6. CONVERSIONES OCTALES, HEXADECIMALES Y DECIMALES

Se ha visto ya cómo pueden representarse enteros y fracciones utilizando el sistema binario. Sin embargo, los numerales binarios no son los más convenientes para las personas, porque se requiere un gran número de bits para escribir un número relativamente pequeño. La base 10 permite escribir números en una forma más compacta, pero no es un sistema adecuado para computadoras. Un sistema basado en el 8, llamado *sistema octal*, produce numerales compactos como el sistema base 10 usual y es a la vez más compatible con el sistema base 2 de las computadoras, ya que $2^3 = 8$. Al igual que los sistemas decimal y binario, recibe su nombre del número de símbolos y de sus valores posicionales.

Sistema de numeración octal o base 8

1. Hay ocho símbolos que se usan como dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
2. Los valores posicionales son potencias de la base 8 (por ejemplo, 1, 8, 64, 512, 4096, etc.).

El sistema octal no es tan común como el hexadecimal (base 16). Al utilizar un sistema base 16 es posible escribir números grandes de una forma muy compacta, y como $2^4 = 16$, este sistema también es compatible con el sistema base 2 de las computadoras.

Sistema de numeración hexadecimal o base 16

1. Hay 16 símbolos que se usan como dígitos:
   0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F.
2. Los valores posicionales son potencias de la base 16 (i. e, 1, 16, 256, 4096, etc.).

No puede usarse 10 para representar diez, ya que en base 16 el numeral 10 representa dieciséis. Asimismo, 11 representa diecisiete, 12 representa dieciocho, 13 representa diecinueve, 14 representa veinte y 15 representa veintiuno. Por tanto, se necesita introducir seis símbolos nuevos; las letras A, B, C, D, E y F se usan para representar diez, once, doce, trece, catorce y quince, respectivamente. Las reglas de conversión que se estudiaron en las secciones 4.1 y 4.2 también se aplican en este sistema.

Reglas de conversión

1. Para convertir un entero o una fracción *a* base 10 *de* otra base o para convertir un entero *de* base 10 *a* otra base:
   a. Se marcan los dígitos del número no decimal con sus valores posicionales, aun cuando los dígitos de ese número estén en blanco.
   b. Si se conocen los dígitos del número no decimal, cada uno de ellos se multiplica por su valor posicional. La suma de estos productos es el número en base 10.
   c. Si los dígitos del número no decimal están en blanco, el número base 10 se divide entre el valor posicional más alto que se haya marcado. El cociente es el dígito de la extrema izquierda del número buscado. El residuo se divide entre el valor posicional siguiente para obtener el dígito siguiente, y así sucesivamente.
2. Para convertir una fracción *de* base 10 *a* otra base *n*:
   a. La fracción decimal se multiplica por *n* y "se separa" la parte entera del producto. Ésta es el primer dígito a la derecha del punto de la fracción base *n*.
   b. La fracción decimal que queda se multiplica por *n* y "se separa" el entero, el cual es el dígito siguiente a la derecha en la fracción base *n*.
   c. El paso b se repite hasta que:
      1. La fracción que queda es 0 o
      2. Ocurre un patrón periódico.

Convertir 42.3_8 a base 10.

Ejemplo 1

Solución

Se marcan los dígitos del numeral en base 8 con sus valores posicionales.

$$\underset{8}{4}\ \underset{1}{2}\quad \underset{1/8}{3}$$ El número representa $(4 \times 8) + (2 \times 1) + (3 \times 1/8)$

$$32 + 2 + 3/8$$
$$34.375.$$

Por tanto, $42.3_8 = 34.375_{10}$.

Convertir 73_{10} a base 8.

Ejemplo 2

Solución

Se marcan los dígitos del numeral en base 8 con sus valores posicionales. Se desconocen aún los dígitos, de modo que se dejan los espacios en blanco.

$$\underset{64}{\_\_}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_}$$ Encontrar grupos de 64: $73 \div 64 = 1$ R 9.
Encontrar grupos de 8: $9 \div 8 = 1$ R 1.
Encontrar grupos de 1: $1 \div 1 = 1$.

Por tanto, $73_{10} = 111_8$.

Convertir 0.75_{10} a base 8.

Ejemplo 3

Solución

Se multiplica por 8: $0.75 \times 8 = 6.00$. La parte entera es 6. La parte fraccionaria es 0, de modo que $0.75_{10} = 0.6_8$.

Convertir $C3.8_{16}$ a base 10.

Ejemplo 4

Solución

Se marcan los dígitos del numeral en base 16.

$$\underset{16}{C}\ \underset{1}{3}\ .\ \underset{1/16}{8}$$ El número representa

$$(12 \times 16) + (3 \times 1) + (8 \times 1/16)$$
$$o\ 192 + 3 + 0.5$$
$$o\ 195.95$$

Por tanto, $C3.8_{16} = 195.5_{10}$.

Convertir 97.4_{10} a base 16. **Ejemplo 5**

Solución

Se marcan los dígitos del entero base 16. Se desconocen aún los dígitos, de modo que se dejan los espacios en blanco.

— —
16 1

Encontrar grupos de 16: $97 \div \mathbf{16} = 6$ R 1.
Encontrar grupos de 1: $1 \div \mathbf{1} = 1$.
Por tanto, $97_{10} = 61_{16}$.

Para hacer la conversión de la fracción 0.4, se multiplica por 16: $0.4 \times 16 = 6.4$. La parte entera es 6, y $\underline{0}.4 \times 16$ da principio a un patrón periódico, es decir, $0.4_{10} = 0.6_{16}$. Por lo tanto, $97.4_{10} = 61.6_{16}$.

También es posible aplicar los algoritmos de la sección 4.2 para hacer conversiones de enteros.

Para convertir un entero base *n* a un entero base 10:

1. Se multiplica el dígito de la extrema izquierda por *n* y se suma el dígito siguiente a la derecha.
2. Se multiplica la suma por *n* y se suma el dígito siguiente.
3. Se repite el paso 2 hasta que se haya sumado el último dígito. La suma es el entero decimal.

Convertir 217_8 a base 10. **Ejemplo 6**

Solución

$8(2) + 1 = 17$.
$8(17) + 7 = 143$. Por lo tanto, $217_8 = 143_{10}$.

Convertir 98_{10} a base 8. **Ejemplo 7**

Solución

Se empieza aquí: 0 R 1
8) 1 R 4
8)12 R 2
8)98 Por lo tanto, $98_{10} = 142_8$.

Convertir $2CC_{16}$ a base 10.

Ejemplo 8

Solución

$16 \times 2 + 12 = 44.$
$16 \times 44 + 12 = 716.$ Por lo tanto, $2CC_{16} = 716_{10}$.

Convertir 427_{10} a base 16.

Ejemplo 9

Solución

Se empieza aquí: 0 R 1
6) 1 R 10 = A
16) 26 R 11 = B
16)427 R Por lo tanto, $427_{10} = 1AB_{16}$.

Ejercicios

Convertir los siguientes números octales a decimales. Ver los ejemplos 1 al 6.

1. 72	**2.** 1234	**3.** 204
4. 324	**5.** 11.11	**6.** 12.23
7. 42.61	**8.** 7.05	**9.** 1010.101
10. 1007.64		

Convertir los siguientes números hexadecimales a decimales. Ver los ejemplos 4 y 8.

11. 144	**12.** 234	**13.** 10B
14. 2BD	**15.** 1A.C	**16.** B2.2
17. 5.A	**18.** FD.1	**19.** 1E3.41
20. 2BF.88		

Convertir los siguientes números decimales a octales. Ver los ejemplos 2, 3 y 7.

21. 34	**22.** 40.5	**23.** 59.25
24. 80	**25.** 612	**26.** 60
27. 80.375	**28.** 36.0625	**29.** 559
30. 445		

Convertir los siguientes números decimales a hexadecimales. Ver los ejemplos 5 y 9.

31. 34	**32.** 40.5	**33.** 59.25
34. 80	**35.** 612	**36.** 60
37. 80.375	**38.** 36.0625	**39.** 559
40. 445		

*41. Con base en lo que se ha aprendido acerca del complemento a diez y a dos, escribir:

(a) el complemento a ocho de 743_8 utilizando cuatro dígitos.
(b) el complemento a dieciséis $7A4F_{16}$ utilizando seis dígitos.

*42. Si se usa "0" para indicar un número positivo ¿qué dígito indicaría un número negativo:

(a) en base 10?
(b) en base 8?
(c) en base 16?
(d) en base n?

*43. Resolver los problemas siguientes utilizando cuatro dígitos y la aritmética de complementos.

$$\begin{array}{rrr} 23_{10} & 27_8 & 17_{16} \\ -45_{10} & -55_8 & -2D_{16} \end{array}$$

⇒44. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para convertir un entero base B a un entero decimal.
⇒45. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para convertir un entero decimal a un entero base B.
⇒46. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para convertir una fracción decimal a una fracción base B.
*47. Los códigos ASCII y EBCDIC (ver los problemas 44 y 45 de la sección 4.1) con frecuencia se dan en dígitos hexadecimales.

a. Escribir la representación ASCII de los caracteres 0 al 9 y A a Z en hexadecimal.
b. Escribir la representación EBCDIC de los caracteres 0 al 9 y A a Z en hexadecimal.

*48. a. Encontrar un número octal de dos dígitos tal que si los dígitos se inviertan, el nuevo número es la mitad del original.
b. ¿Es posible encontrar tal número en el sistema decimal?

4.7. CONVERSIONES OCTALES, HEXADECIMALES Y BINARIAS

Debido a que $2^3 = 8$, existe una relación entre la base 2 y la base 8 que facilita las conversiones entre estas dos. Cualquier número octal es equivalente a uno binario de tres bits, como se muestra en la tabla 4.4.

Tabla 4.4

Octal	*Binario*
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Tres dígitos binarios pueden representar un dígito octal aplicando la siguiente regla de conversión:

Para hacer conversiones de binario a octal y a la inversa:

1. Si los dígitos del número dado son binarios, agruparlos de tres en tres, empezando en el punto binario. Sustituir cada grupo por un dígito octal de valor equivalente.
2. Si los dígitos del número dado son octales, sustituir cada dígito por un grupo de tres dígitos binarios de valor equivalente.

Considérese 11101101_2. Para convertirlo a octal, se observa que el punto binario se encuentra al final de este número. Empezando ahí, se consideran grupos de tres dígitos a la vez: $\overleftarrow{011}\ \overleftarrow{101}\ \overleftarrow{101.}$ Puesto que el grupo de la extrema izquierda no está completo, el dígito que falta se llena con un 0. Cada uno de estos grupos puede sustituirse por un dígito octal. Como se muestra en la tabla 4.4, el grupo de la extrema izquierda representa 3, el de en medio 5 y el de la extrema derecha 5. Por lo tanto, $11101101_2 = 355_8$.

Ejemplo 1

Convertir 111.01101_2 a un numeral octal.

Solución

Empezando en el punto decimal, se agrupan los dígitos de tres en tres: $\overleftarrow{111.}\ \overrightarrow{011}\ \overrightarrow{010.}$ (Puesto que el grupo de la extrema derecha no está completo, se llena el dígito faltante con un 0.) Cada uno de estos grupos puede sustituirse por un dígito octal. El grupo de la extrema izquierda representa 7, el de en medio representa 3 y el de la derecha representa 2. Por tanto, $111.01101_2 = 7.32_8$.

Convertir 401_8 a un numeral binario.

Ejemplo 2

Solución

Puesto que se requieren tres dígitos binarios para representar un dígito octal, el número tendrá tres grupos de dígitos binarios. Cada dígito octal se sustituirá por uno de estos grupos. El dígito octal de la extrema izquierda (4) se escribe 100, el dígito de en medio (0) 000 y el de la extrema derecha (1) 001. Por tanto, $401_8 = 100000001_2$.

Convertir 67.1_8 a un numeral binario.

Ejemplo 3

Solución

El numeral binario tendrá dos grupos de tres dígitos a la izquierda del punto binario y un grupo de tres a la derecha. El 6 se escribe como 110, el 7 se escribe como 111, y el 1 se escribe como 001. Por tanto, $67.1_8 = 110111.001_2$.

Puesto que $2^4 = 16$, es posible agrupar dígitos binarios de cuatro en cuatro para hacer conversiones a hexadecimal o a la inversa. Ver la tabla 4.5.

Tabla 4.5

Hexadecimal	*Binario*
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Cuatro dígitos binarios pueden representar un dígito hexadecimal aplicando la siguiente regla de conversión:

Para hacer conversiones de binario a hexadecimal y a la inversa:

1. Si los dígitos del número dado son binarios, agruparlos de cuatro en cuatro, empezando en el punto binario. Sustituir cada grupo por un dígito hexadecimal de valor equivalente.
2. Si los dígitos del número dado son hexadecimales, sustituir cada dígito por un grupo de cuatro dígitos binarios de valor equivalente.

Ejemplo 4

Convertir 11101101_2 a un numeral hexadecimal.

Solución

El punto binario está al final; por consiguiente, los grupos son $\underleftarrow{1110}\ \underleftarrow{1101}$. El grupo de la izquierda representa 14, pero cada grupo de cuatro dígitos binarios debe sustituirse por un dígito hexadecimal. Recuérdese que 14 se escribe E en base 16. El grupo de la derecha representa 13, que se escribe como D. Por lo tanto, $11101101_2 = ED_{16}$.

Ejemplo 5

Convertir 111.01101_2 a un numeral hexadecimal.

Solución

Empezando en el punto binario, los grupos son:

$$\underleftarrow{0111}\ .\ \underrightarrow{0110}\ \underrightarrow{1000}$$

(donde el grupo de la extrema derecha se ha completado con 0). El grupo de la extrema izquierda representa 7, el de en medio 6 y el de la extrema derecha 8. Por lo tanto, $111.01101_2 = 7.68_{16}$.

Ejemplo 6

Convertir $1A.C_{16}$ a un numeral binario.

Solución

Habrá dos grupos de cuatro dígitos binarios a la izquierda del punto binario y un grupo de cuatro dígitos binarios a la derecha del mismo. El 1 se escribe como 0001, A como 1010 y C como 1100. Por lo tanto, $1A.C_{16} = 00011010.1100_2$.

Para hacer conversiones de octal a hexadecimal o de hexadecimal a octal es conveniente emplear el sistema binario.

Para hacer conversiones de octal a hexadecimal y a la inversa:

1. Se convierte a binario el número dado utilizando grupos de dígitos binarios.

   (a) Cada dígito octal es equivalente a un número binario de tres bits.
   (b) Cada dígito hexadecimal es equivalente a un número binario de cuatro bits.

2. Se reagrupan los dígitos binarios y se hace la conversión a la otra base.

Ejemplo 7

Convertir 37.7_8 a un numeral hexadecimal.

Solución

$37.7_8 = 011 \quad 111 \quad . \quad 111_2$.
$011111.111_2 = 0001 \quad 1111 \quad . \quad 1110_2 = 1F.E_{16}$.

Ejemplo 8

Convertir $3.B_{16}$ a un numeral octal.

Solución

$3.B_{16} = 0011 \quad . \quad 1011_2 = 011 \quad . \quad 101 \quad 100_2 = 3.54_8$.

Ejercicios

Convertir los siguientes números binarios a octales. Ver el ejemplo 1.

1. 101110	**2.** 100111	**3.** 1011010.111
4. 1000101.101	**5.** 1101011.10	**6.** 1011001.01
7. 1010.1011	**8.** 11.11011	

Convertir los siguientes números octales a binarios. Ver los ejemplos 2 y 3.

9. 62	**10.** 76	**11.** 22.3
12. 162.5	**13.** 3.04	**14.** 2.56
15. 12.475	**16.** 17.031	

Convertir los siguientes números binarios a hexadecimales. Ver los ejemplos 4 y 5.

17. 101110	**18.** 100111	**19.** 1011010.111
20. 1000101.101	**21.** 1101011.10	**22.** 1011001.01
23. 1010.1011	**24.** 11.11011	

Convertir los siguientes números hexadecimales a binarios. Ver el ejemplo 6.

25. 93 **26.** C8 **27.** A3.8
28. B9.6 **29.** 2.DE **30.** F.74
31. 1B.0F **32.** C.402

Convertir los siguientes números octales a hexadecimales. Ver el ejemplo 7.

33. 42 **34.** 62.5 **35.** 12.47
36. 17.03

Convertir los siguientes números hexadecimales a octales. Ver el ejemplo 8.

37. 3.D **38.** F.2 **39.** A.2B
40. 1B.0F

***41.** (a) Convertir 110010_2 a un número base 4.
(b) Convertir 231_4 a un número base 2.

***42.** (a) Convertir 786_9 a un número base 3.
(b) Convertir 102112_3 a un número base 9.

***43.** Considérese el número $111111111_2 = (256 + 128 + 64) + (32 + 16 + 8) + (4 + 2 + 1)$. Aplicar la propiedad distributiva en cada grupo de tres sumandos y explicar cómo el procedimiento relaciona el número binario con su equivalente octal.

***44.** Cuando cada dígito de un número decimal se convierte a un número binario de cuatro dígitos, el resultado es un código conocido como BCD (siglas en inglés de Decimal Codificado en Binario). Escribir los números siguientes en BCD y escribirlos como números binarios.

a. 7
b. 17
c. 77
d. 13

***45.** ¿Cuál es el número que sigue en la sucesión?
12, 13, 14, 15, 20, 22, 30, 40

4.8. ARITMÉTICA OCTAL Y HEXADECIMAL

Para realizar operaciones aritméticas en las bases 8 y 16, se construyen las tablas de sumar y multiplicar (ver las tablas 4.6 y 4.7). Estas tablas se usan del mismo modo que las tablas para la base 10 de la sección 2.4.

Tabla 4.6

Tabla de adición octal

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Tabla 4.7

Tabla de multiplicación octal

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Para sumar números octales:

1. Se alinean los puntos octales.
2. Se suma columna por columna, considerando el acarreo en caso de ser necesario.

Ejemplo 1

Efectuar la siguiente suma octal: 752 + 46.

Solución

```
1  1  1
   7  5  2
+     4  6
-----------
1  0  2  0
```

2 + 6 = 10; se escribe 0, el acarreo es 1
1 + 5 = 6; 6 + 4 = 12; se escribe 2, el acarreo es 1
1 + 7 = 10; se escribe 0, el acarreo es 1
este 1 es el acarreo de la última columna.

Ejemplo 2

Efectuar la siguiente suma octal: 607 + 25.

Solución

```
   1
6  0  7
+  2  5
---------
6  3  4
```

7 + 5 = 14; se escribe 4, el acarreo es 1
1 + 0 = 1; 1 + 2 = 3.

Ejemplo 3

Efectuar la siguiente suma octal: 72.34 + 1.6.

Solución

Se alinean los puntos octales:

```
   1
7  2  .  3  4
+1  .  6
----------
7  4  .  1  4
```

3 + 6 = 11; se escribe 1, el acarreo es 1
1 + 2 = 3; 3 + 1 = 4.

La multiplicación octal se efectúa igual que la multiplicación decimal o la binaria. La única diferencia es que se usan los "hechos numéricos" de las tablas octales.

Para multiplicar dos números octales:

1. Se alinean los dígitos de la extrema derecha de ambos números.
2. Se multiplica columna por columna, dejando un espacio al empezar cada columna.

Efectuar la siguiente multiplicación octal: 34 × 6.

Ejemplo 4

Solución

```
   3
   3 4
   × 6
 ------
 2 5 0
```

6 × 4 = 30; se escribe 0, el acarreo es 3
6 × 3 = 22; 22 + 3 = 25.

Efectuar la siguiente multiplicación octal: 127 × 13.

Ejemplo 5

Solución

```
     1 2 7
     × 1 3
     -----
     4 0 5
+  1 2 7
-------
   1 6 7 5
```

se multiplica por 3: 3 × 7 = 25; se escribe 5, el acarreo es 2
3 × 2 = 6; 6 + 2 = 10; se escribe 0, el acarreo es 1
3 × 1 = 3; 3 + 1 = 4
se deja un espacio y se multiplica por 1:
1 × 7 = 7; 1 × 2 = 2; 1 × 1 = 1
se suman los productos parciales.

Efectuar la siguiente multiplicación octal: 34.5 × 0.12.

Ejemplo 6

Solución

```
     3 4 . 5
     0. 1   2
     -------
     7 1   2
   3 4 5
   4 .3 6   2
```

se multiplica por 2: 2 × 5 = 12; se escribe 2, el acarreo es 1
2 × 4 = 10; 10 + 1 = 11; se escribe 1, el acarreo es 1
2 × 3 = 6; 6 + 1 = 7
se deja un espacio y se multiplica por 1
se suman los productos parciales y se cuentan tres lugares octales.

También es posible usar las tablas para realizar restas y divisiones leyéndolas de manera diferente. Para restar 3 de 11 con base en la tabla de sumar, se localiza el 3 a la izquierda y se sigue ese renglón hasta encontrar el 11. El 6 que está en la parte superior de esa columna es el resultado.

Para usar una tabla de sumar para efectuar sustracciones:

1. Se encuentra el sustraendo (el número que se está restando) en la columna de la izquierda.
2. Se sigue ese renglón hasta encontrar el minuendo (el número del que se está restando).
3. El número que está en el primer renglón arriba del minuendo es la diferencia.

Cuando ocurre un acarreo negativo (por ejemplo, cuando "se tiene que pedir prestado") en un problema de sustracción octal, recuérdese que $10_8 = 8_{10}$; por tanto, $10 - 1 = 7$ en base 8.

Ejemplo 7

Efectuar la siguiente resta octal: $752 - 46$.

Solución

```
    4 12
  7 5 2
- 4 6
-------
  7 0 4
```

2 − 6 se requiere un acarreo negativo; 12 − 6 = 4

4 − 4 = 0.

Ejemplo 8

Efectuar la siguiente resta octal: $607 - 25$.

Solución

```
  5 10
  6  0 7
- 2  5
-------
  5  6 2
```

7 − 5 = 2

0 − 2 se requiere un acarreo negativo; 10 − 2 = 6

5 quedó después de tomar un acarreo negativo de 6.

Ejemplo 9

Efectuar la siguiente resta octal: 10 − 3.2.

Solución

```
0 7
  10   10
1 0 . 0
− 3 . 2
-------
  4 . 6 ── 0 − 2 se requiere un acarreo negativo; 10 − 2 = 6
  └──────── 7 − 3 = 4.
```

Para realizar operaciones aritméticas hexadecimales, primero se contruyen las tablas de sumar y multiplicar en este sistema (ver las tablas 4.8 y 4.9). Ahora las operaciones se efectúan como si se tratara de la base 10, pero utilizando las tablas hexadecimales para obtener las "cualidades numéricas".

Ejemplo 10

Efectuar la siguiente suma hexadecimal: 1A3 + 27.

Solución

```
1 A 3
+ 2 7
-----
1 C A ── 3 + 7 = A
  └──────── A + 2 = C
```

Ejemplo 11

Efectuar la siguiente suma hexadecimal: 1A.B + C.D.

Solución

```
1 1
1.A . B
+C . D
-------
2 7 . 8
│ │   └──── B + D = 18; se escribe 8, el acarreo es 1
│ └──────── 1 + A = B; B + C = 17; se escribe 7, el acarreo es 1
└──────────── 1 + 1 = 2.
```

La multiplicación en el sistema hexadecimal se efectúa igual que en los sistemas decimal, binario y octal si se usan las tablas hexadecimales. Se alinean los dígitos de la extrema derecha, se multiplica co-

Tabla 4.8

Tabla de adición hexadecimal

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Tabla 4.9

Tabla de multiplicación hexadecimal

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

lumna por columna, dejando un espacio en blanco al empezar cada columna. Se suman los productos parciales y se cuenta el número total de lugares hexadecimales presentes en el problema para localizar el punto hexadecimal.

Efectuar la multiplicación hexadecimal: 1AB × 3.

Ejemplo 12

Solución

```
2  2
1  A  B
×     3
-------
5  0  1 — 3 × B = 21; se escribe 1, el acarreo es 2
|  └────── 3 × A = 1E; 1E + 2 = 20; se escribe 0, el acarreo es 2
└─────────── 3 × 1 = 3; 3 + 2 = 5.
```

Efectuar la siguiente multiplicación hexadecimal: 2.C3 × 1A.

Ejemplo 13

Solución

```
   2 . C 3    se multiplica por A: A × 3 = 1E; se escribe E, el
                acarreo es 1
     × 1 A    A × C = 78; 78 + 1 = 79; se escribe 9, el acarreo
-----------    es 7
1 B   9 E — A × 2 = 14; 14 + 7 = 1B
2 C   3   — se deja un espacio y se multiplica por 1
-----------
4 7 . C E — se suman los productos parciales y se cuentan dos
              lugares.
```

En la sustracción hexadecimal debe recordarse que $10_{16} = 16_{10}$. Cuando hay un acarreo negativo se tiene 10 − 1 = F. Es posible usar la tabla de sumar hexadecimal para realizar las restas.

Efectuar la siguiente resta hexadecimal: 1A3 = 27.

Ejemplo 14

Solución

```
   9 13
1  A  3
−  2  7
-------
1  7  C — 3 − 7 se requiere un acarreo negativo; 13 − 7 = C
   └────── 9 − 2 = 7.
```

Efectuar la siguiente resta hexadecimal: 1A.B − C.D. **Ejemplo 15**

Solución

```
0  19
    9  1B
1   A . B
−   C . D
-----------
    D . E
```

B − D se requiere un acarreo negativo: 1B − D = E
9 − C se requiere un acarreo negativo: 19 − C = D.

Ejercicios

Efectuar las siguientes sumas octales. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. 643 + 57 **2.** 516 + 36 **3.** 63.45 + 2.7
4. 3.76 + 1.542 **5.** 0.01 + 12.746

Efectuar las siguientes multiplicaciones octales. Ver los ejemplos 4 al 6.

6. 45 X 5 **7.** 236 X 21 **8.** 25.4 X 0.23
9. 23.7 X 4.6 **10.** 2.11 X 3.07

Efectuar las siguientes restas octales. Ver los ejemplos 7 al 9.

11. 643 − 57 **12.** 516 − 36 **13.** 63.45 − 2.7
14. 23.26 − 3.5 **15.** 10.00 − 0.647

Efectuar las siguientes sumas hexadecimales. Ver los ejemplos 10 y 11.

16. 2BC + 38 **17.** 3CD + 25 **18.** 2B.C + E.D
19. 7.83 + 2.C **20.** 19.A + F.02

Efectuar las siguientes multiplicaciones hexadecimales. Ver los ejemplos 12 y 13.

21. 2BC X 2 **22.** 3D4 X 2B **23.** 34C X 2.1
24. 4F.2 X 3.E **25.** E.15 X 10.C

Efectuar las siguientes restas hexadecimales. Ver los ejemplos 14 y 15.

26. 2B2 − 38 **27.** 3CD − 25 **28.** 2B.C − E.D
29. 7.83 − 2.C **30.** 19.A − F.02

*31. Dividir 7435_8 entre 21_8.
*32. Dividir $7D30E_{16}$ entre $2A1_{16}$.
*33. Escribir las fracciones siguientes como decimales periódicos.

a. 1/9 (base 10)
b. 1/7 (base 8)
c. 1/F (base 16)

Revisión de capítulo

El símbolo que denota un número se llama _____ .

El sistema de numeración _____ o base 10 tiene diez símbolos que se usan como dígitos, y los valores posicionales son potencias de _____ .

El sistema de numeración _____ o base 2 tiene dos símbolos que se usan como dígitos, y los valores posicionales son potencias de _____ . La palabra _____ es la contracción de *binary digit*.

El _____ de un número binario de ocho bits x es $100000000 - x$.

Un número binario negativo tiene el dígito _____ como el bit de la extrema izquierda.

Cuando la suma, la diferencia o el producto de dos enteros sale del rango de enteros que pueden representarse por una computadora, esta condición se describe usando la palabra _____ .

El sistema de numeración _____ o base 8 tiene ocho símbolos que se usan como dígitos, y los valores posicionales son potencias de _____ .

El sistema de numeración _____ o base 16 tiene dieciséis símbolos que se usan como dígitos, y los valores posicionales son potencias de _____ .

En base 16, el número diez se representa con el dígito _____ .

Cualquier dígito octal puede representarse por _____ dígitos binarios.

Cualquier dígito hexadecimal puede representarse por _____ dígitos binarios.

Prueba de capítulo

Convertir los números siguientes a la base que se indica.

1. 11100101_2 = _____ 10
2. 10011101_2 = _____ 10

3. 55_{10} = _____ 2
4. 153_{10} = _____ 2
5. 201_{10} = _____ 2
6. 101.1001_2 = _____ 10
7. 11.01011_2 = _____ 10
8. 111.1101_2 = _____ 10
9. 0.1875_{10} = _____ 2
10. 7.15_{10} = _____ 2

Efectuar las operaciones siguientes utilizando aritmética binaria.

11. 110.101 + 10.11
12. 1101 + 101 + 111
13. 110.110 − 10.101
14. 101.11 × 1.01
15. 100011 ÷ 100

16. Encontrar el complemento a dos de los números siguientes.

    (a) 00101101
    (b) 11011011

17. Efectuar la resta utilizando aritmética de complementos.

    01101001 − 00101011

18. Efectuar la resta utilizando aritmética de complementos.

    00110011 − 00001111

19. Efectuar la resta con acarreo negativo.

    01101001 − 00101011

20. Hacer la conversión a base 10 y efectuar la resta.

    00110011 − 00001111

Escribir los números siguientes como números binarios de ocho bits.

21. (a) 63 (b) −63

22. (a) 103 (b) −103

23. Escribir los números siguientes como números decimales con signo.

    (a) 00010111
    (b) 11100110

Efectuar las sumas siguientes en el sistema binario. Usar ocho bits. Verificar las respuestas haciendo la conversión a decimal.

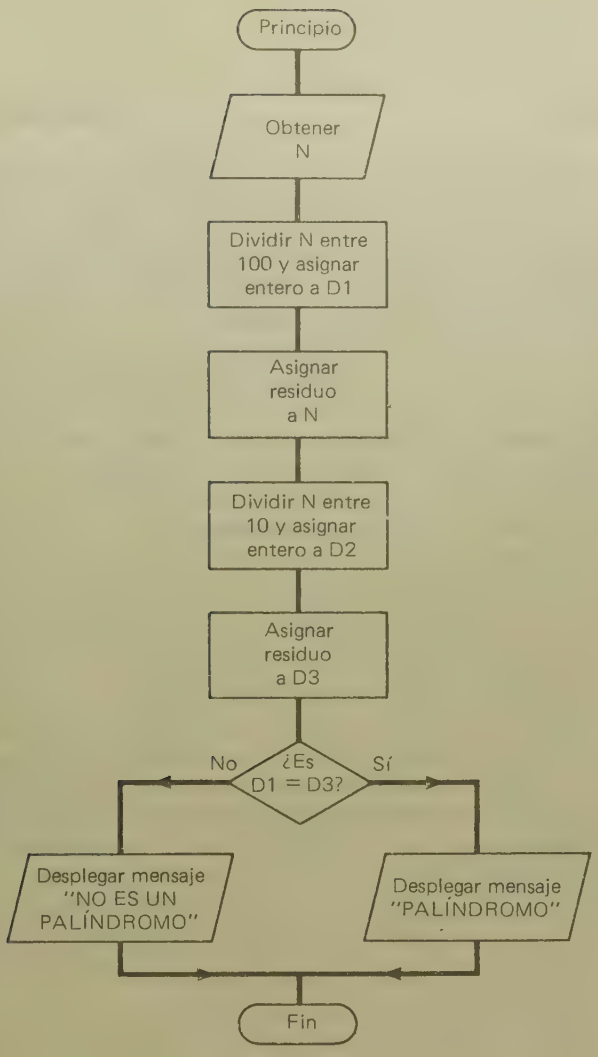
24. 34 + (−19)
25. −34 + (−19)

Convertir los números siguientes a la base que se indica.

26. 463_8 = _____ 10
27. $2BC_{16}$ = _____ 10
28. $2B.C_{16}$ = _____ 10
29. 211.75_{10} = _____ 8
30. 211.75_{10} = _____ 16
31. 11000111.001_2 = _____ 8
32. 57.34_8 = _____ 2
33. 11000111.001_2 = _____ 16
34. $1A7.E6_{16}$ = _____ 2
35. $D2.7C_{16}$ = _____ 8

Efectuar las operaciones indicadas.

36. $23.54_8 + 134.7_8$
37. $35.2_8 \times 1.6_8$
38. $32.41_8 - 1.7_8$
39. $1A.7_{16} \times 0.2B_{16}$
40. $2F8_{16} - A9_{16}$
⇒41. El diagrama de flujo siguiente ilustra un algoritmo que detecta un número palindrómico cuando se mete un entero decimal de tres dígitos. Modificarlo para detectar un número palindrómico cuando se mete un entero binario de cuatro dígitos. Usar aritmética binaria.



BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Bronson, Gary y Karl Lyon. "Two's Complement Numbers Revisited," en *BYTE*, Vol. 10 No. 6 (Junio de 1985), 230-231. (Método para evaluar números negativos en forma de complemento a dos.)

Donahue, Richard J. "Computing Palindromic Sums by Computer," en *The Mathematics Teacher*, Vol. 77 No. 4 (Abril de 1984), 269-271. (Programa en BASIC para determinar la suma palindrómica de cualquier número de dos dígitos.)

Golden, Frederic. "Big Dimwits and Little Geniuses," en *Time* (Enero 3, 1983), 30-32. (Se expone la historia de las computadoras.)

Zirkel, Gene. "An Extension to Changing Bases, " en *The MATYC Journal*, Vol. 15 No. 3 (Otoño de 1981), 224.

Biografía — Augusta Ada Byron

Augusta Ada Byron, en cuyo honor recibe su nombre el lenguaje ADA, nació el 10 de diciembre de 1815. Sus padres se separaron un mes más tarde y su progenitor, Lord Byron (el poeta), partió de Inglaterra. De niña recibió su educación de tutores. Después recibió la ayuda de Augustus De Morgan.

En 1833 vio la Máquina Diferencial de Charles Babbage, en la que había trabajado durante 10 años con apoyo del gobierno. Se diseñó para realizar cálculos en navegación y astronomía, pero nunca se terminó. Babbage cambiaba constantemente los planos y éstos se hicieron cada vez más elaborados hasta que, en 1834, empezó a trabajar en otro proyecto llamado la Máquina Analítica. A diferencia de la Máquina Diferencial, la Analítica debía ser programable.

Ada Byron quedó fascinada con el proyecto. Pensaba que el diseño funcionaría y alentó a Babbage. Se dice que sugirió el uso del sistema binario, pero la Máquina Analítica utilizó el sistema decimal.

Transcurrieron 100 años antes de que se utilizara realmente este sistema en una máquina.

En 1835 Ada contrajo matrimonio con William, el octavo Lord King, y cuando éste heredó su título, Ada se convirtió en la Condesa de Lovelace. Continuó trabajando con Babbage y tradujo un escrito, relativo a su proyecto, del francés al inglés. Añadió notas por su cuenta y casi triplicó la longitud del escrito, que hoy se conoce como "Observaciones sobre la Máquina Analítica de Babbage". Este escrito contiene un programa casi completo que escribió Lady Lovelace con ayuda de Babbage. A pesar de que el programa carece de algunos conceptos importantes de la programación moderna, se le acredita con frecuencia como "la primera programadora de computadoras".

Cuando los fondos gubernamentales para el proyecto de Babbage se suspendieron en 1842, Lady Lovelace concibió un sistema para apostar a fin de conseguir dinero para el proyecto. Perdió más de lo que ganó.

Ada se enfermaba con frecuencia; murió el 27 de noviembre de 1852. Aun cuando Babbage vivió hasta 1871, nunca terminó la Máquina Analítica.

5

Polinomios

Las variables empleadas en la programación de computadoras para escribir polinomios y otras expresiones algebraicas pueden pensarse como los nombres de lugares de almacenamiento. Cuando se ejecuta un programa, los contenidos de cada lugar pueden cambiar, del mismo modo que el contenido de los buzones postales.

5.1. EXPONENTES

En ocasiones, el álgebra se describe como una "generalización de la aritmética". Es decir, la suma, resta, multiplicación y división se aplican con literales y números. Las literales (o *variables*) representan números cuyos valores pueden ser desconocidos. La revisión de álgebra se inicia examinando las reglas de exponenciación.

Un exponente es un símbolo empleado para indicar una multiplicación repetida. La expresión x^p significa que x debe repetirse como factor de sí mismo p veces. A la x de esta expresión se le llama la *base* y a la p *exponente*. (En ocasiones, se dice "x está elevada a la potencia p".) Por ejemplo, $7^2 = 7(7) = 49$; $3^4 = 3(3)(3)(3) = 81$; $x^5 = x(x)(x)(x)(x)$.

Definición

x^p significa que x debe usarse p veces como factor, si x es un número real (o una variable que represente un número real) y p es un entero positivo.

En los ejemplos siguientes se desarrollarán algunas reglas que son métodos cortos que permitirán la simplificación adecuada de expresiones algebraicas.

Simplificar $7^2\ (7^3)$.

Ejemplo 1

Solución

Debido a bue la primera expresión representa dos factores 7 y la segunda representa tres factores de 7, en el producto hay un total de cinco 7: $7^2\ (7^3) = 7(7)(7)(7)(7) = 7^5$. A fin de abreviar el procedimiento, se suman los exponentes. Es decir, $7^2\,(7^3) = 7^{2+3} = 7^5$.

Simplificar x^5/x^3.

Ejemplo 2

Solución

Hay cinco factores de x en el numerador. Hay tres factores x en el denominador; estos tres factores en el denominador "cancelan" tres de las x del numerador, quedando dos factores x o x^2. A fin de abreviar el procedimiento, se restan los exponentes. Es decir, $x^5\ / x^3 = x^{5-3} = x^2$.

Si se generalizan los conceptos implícitos en los ejemplos anteriores, se obtienen dos de las reglas para trabajar con exponentes:

Reglas de exponentes

Si x es un número real y m y n son enteros positivos:

$$x^m\ (x^n) = x^{m+n} \qquad (1)$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \text{ si } x \neq 0 \qquad (2)$$

La regla 1 obliga a que ambos factores tengan la misma base. El producto también tiene la misma base. La regla 1 no se aplica cuando los dos factores tienen bases diferentes. Por ejemplo, $2^3(3^2)$ se escribe $8(9) = 72$.

La definición que se ha usado de exponentes es válida sólo si éstos son enteros positivos. Sin embargo, es posible ampliar las reglas para enteros no positivos.

Simplificar x^4/x^4.

Ejemplo 3

Solución

Al aplicar la regla 2 se obtiene $x^4/x^4 = x^0$. Se sabe asimismo que si $x \neq 0$, $x^4/x^4 = 1$. Para que no haya dos respuestas diferentes

para el mismo problema, los matemáticos establecen que $x^0 = 1$. (El argumento es válido para cualquier valor de $x \neq 0$ y para cualquier exponente.)

Ejemplo 4

Simplificar $7^2/7^5$.

Solución

Por la regla 2, $7^2/7^5 = 7^{2-5} = 7^{-3}$.
Pero se sabe también que $7^2 / 7^5 = \dfrac{7(7)}{7(7)(7)(7)(7)} = \dfrac{1}{7^3}$.

Para que no haya dos respuestas diferentes para el mismo problema, los matemáticos establecen que $7^{-3} = 1/7^3$. En general, $x^{-n} = 1/x^n$.

De este modo, se han desarrollado dos reglas más.

Reglas de exponentes

Si x es un número real diferente de cero:

$$x^0 = 1 \qquad (3)$$

$$x^{-n} = 1/x^n \text{ si es un entero positivo} \qquad (4)$$

Puesto que los exponentes negativos pueden presentarse en el numerador o en el denominador de una fracción, es necesario saber cómo realizar la simplificación en cualquiera de los dos casos. En la forma simplificada no deberá haber exponentes cero o negativos.

Ejemplo 5

Simplificar x^{-2}/x^{-3}.

Solución

$x^{-2} = 1/x^2$; $y^{-3} = 1/y^3$.
Por lo tanto, $x^{-2}/y^{-3} = 1/x^2 \div 1/y^3 = 1/x^2 \ (y^3/1) = y^3/x^2$.

Podría decirse que cualquier *factor* con un exponente negativo pasa de un lado de la barra de fracción al otro y el exponente se hace positivo. Al generalizar este resultado, se obtiene la regla 5.

Regla de exponentes

Si x y y son números reales diferentes de cero y m y n son enteros positivos:

$$\frac{x^{-m}}{y^{-n}} = \frac{y^n}{x^m} \qquad (5)$$

Las reglas de exponentes 1 a 5 se enunciaron para exponentes que son enteros positivos. Sin embargo, las cinco reglas pueden aplicarse cuando los exponentes son cero o enteros negativos así como cuando son enteros positivos.

Ejemplo 6

Simplificar las expresiones siguientes:

(a) $3x^3\ (4x^{-5})$

(b) $\dfrac{6y^4}{3y}$

(c) 2^0

Solución

(a) Se aplican las propiedades conmutativa y asociativa para reordenar y reagrupar los factores en la forma $3(4)\ (x^3)\ (x^{-5}) = 12x^{-2}$ (por la regla 1). Por la regla 4 se tiene $\dfrac{12}{x^2}$ como respuesta final.

(b) $\dfrac{6}{3} = 2$ y $\dfrac{y^4}{y} = y^3$ por la regla 2. Por tanto, $\dfrac{6y^4}{3y} = 2y^3$.

(c) $2^0 = 1$ por la regla 3.

Ejemplo 7

Simplificar:

(a) $\dfrac{8a^{-3}b^4}{4x^2y^{-2}}$

(b) $\dfrac{x^4}{x^{-3}}$

Solución

(a) Se sabe que $\frac{8}{4} = 2$. Por la regla 5, a^{-3} pasa al otro lado de la barra de fracción como a^3, y y^{-2} pasa al otro lado de la barra de fracción como y^2. Por tanto, se obtiene $\frac{2b^4y^2}{a^3x^2}$.

(b) Puede aplicarse la regla 2 para obtener $x^{4-(-3)} = x^7$.
O puede aplicarse la regla 5 para obtener $x^4\ (x^3) = x^7$.

El ejemplo 7(b) indica que puede haber más de una forma correcta para resolver un problema. Sin embargo, se obtiene la misma respuesta independientemente del método elegido. En ambos casos el razonamiento podría justificarse citando una de las reglas de exponentes.

Ejercicios

Aplicar la regla 1 para simplificar las expresiones siguientes. Ver los ejemplos 1 y 6(a).

1. $2x^3(3x^2)$
2. $(3^4)(3^7)$
3. $2y^2\ (y^4)(7y)$
4. $(3a^2b)(4ab^2)$
5. $6x^3\ (8x^6)$

Aplicar la regla 2 para simplificar las expresiones siguientes. Ver los ejemplos 2 y 6(b).

6. $\frac{x^7}{x^4}$
7. $\frac{4x^3y^6}{2x^2y^4}$
8. $\frac{8a^5b^2}{4a^3b}$
9. $\frac{12y^4}{24y^2}$
10. $\frac{7z^3}{14z^2}$

Aplicar la regla 3 o la 4 para simplificar las expresiones siguientes. Ver los ejemplos 3 y 4.

11. 2^0
12. 10^0
13. 2^{-4}
14. 8^{-2}
15. 10^{-3}

Simplificar las expresiones siguientes. En la respuesta final no deben aparecer exponentes cero o negativos. Ver los ejemplos 5 al 7.

16. $5x^4(3x^{-6})$
17. $7x^{-3}(8x^2)$
18. $4a^5b^{-4}(5a^{-3}b^2)$
19. $9x^3y^{-2}z(3^{-2}y^5)$
20. $3a^{-2}b^4(6a^{-3}b^2c)$
21. $\frac{4x^2y}{2xy^2}$

22. $\dfrac{10a^2bc}{5ab^2c}$

23. $\dfrac{12xy^2}{3xz}$

24. $\dfrac{2^{-3}a}{3b^{-2}}$

25. $\dfrac{5a^{-2}b}{10a^2b}$

26. $\dfrac{5ab^{-1}}{10a^2b}$

27. $\dfrac{36x^{-3}y}{9xy^{-2}}$

28. $\dfrac{48x^{-3}y}{12xy^{-2}}$

29. $\dfrac{2x^0y}{3xy^0}$

30 $\dfrac{3^2ab^{-1}}{2^{-3}x^{-2}y}$

⇒ 31. El matemático inglés G. H. Hardy visitó en una ocasión al también matemático indio Ramanujan en el hospital. Hardy comentó: "Creo que el número del taxi que me trajo era el 1729. Me pareció un número muy insulso." Ramanujan le contestó: "Es un número muy interesante. Es el número menor que puede expresarse como la suma de dos cubos en dos formas diferentes."*

(a) ¿Cuál es el número mayor que podría ser uno de los cubos empleados para expresar 1729?

(b) Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para generar todos los números menores o iguales que 1729 que pueden expresarse como la suma de dos cubos. Sugerencia: Usar ciclos anidados (por ejemplo, una iteración dentro de otra iteración).

5.2. REGLAS ADICIONALES DE EXPONENTES

Los paréntesis se usan para hacer más claras las expresiones algebraicas. En seguida se desarrollan reglas de exponentes que pueden usarse con expresiones en las que aparecen paréntesis.

Simplificar $(x^2)^3$.

Ejemplo 1

Solución

$(x^2)^3 = x^2(x^2)(x^2)$. Por la regla 1 se obtiene x^6. A fin de abreviar el procedimiento, se multiplican los exponentes. Es decir, $(x^2)^3 = x^{2(3)} = x^6$.

Simplificar $(xy)^2$.

Ejemplo 2

Solución

$(xy)^2 = (xy)(xy)$. Al aplicar las propiedades conmutativa y asociativa para reordenar y reagrupar los factores se obtiene $x(x)(y)(y)$

* Prólogo de S. P. Snow a *A Mathematician's Apology* de G. H. Hardy, Cambridge University Press (1967), 37.

$= x^2\ y^2$. Para abreviar el procedimiento, el exponente se aplica a cada factor por separado. Es decir, $(xy)^2 = x^2 y^2$.

Ejemplo 3

Simplificar $\left(\frac{x}{y}\right)^2$.

Solución

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2}{y^2}.$$

A fin de abreviar el procedimiento, se aplica el exponente al numerador y al denominador.

Los conceptos implícitos en los ejemplos anteriores pueden generalizarse para llegar a las siguientes reglas de exponentes.

Reglas de exponentes

Si x y y son números reales y m y n son enteros:

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad (6)$$

$$(xy)^n = x^n\ y^n \qquad (7)$$

$$(x/y)^n = x^n\ /y^n \text{ donde } y \neq 0 \qquad (8)$$

Es frecuente que se confundan la regla 1 y la 6, aun cuando se usan en circunstancias diferentes. La regla 1 se aplica cuando dos cantidades diferentes, cada una con su propio exponente, se multiplican; la regla 6 se aplica cuando hay una cantidad con dos exponentes.

Se ha visto la manera de simplificar expresiones con exponentes enteros. En caso de presentarse exponentes fraccionarios, uno no querría abandonar las reglas vistas; éstas deberían continuar siendo válidas con el rango ampliado de exponentes. Considérese el problema $(x^{1/2})(x^{1/2})$. Por la regla 1, $x^{1/2}\ (x^{1/2}) = x^1 = x$. La pregunta "¿Qué significa $x^{1/2}$?" podría plantearse como "¿Qué número multiplicado por sí mismo es igual a x?" La respuesta es $\sqrt{x}$. Se dice entonces que $x^{1/2}$ debe significar $\sqrt{x}$. Al generalizar este ejemplo se tiene que para cualquier entero positivo n, $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ cuando $\sqrt[n]{x}$ está definida.

Regla de exponentes

Si x es un número real y n es un entero positivo:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \text{ cuando } \sqrt[n]{x} \text{ está definida.} \qquad (9)$$

Ejemplo 4

Simplificar las expresiones siguientes:

(a) $25^{1/2}$
(b) $-(25^{1/2})$
(c) $(-25)^{1/2}$

Solución

(a) $(25)^{1/2} = \sqrt{25}$. Aun cuando 25 tiene dos raíces cuadradas (5 y -5), el símbolo $\sqrt{\ }$ se refiere únicamente a la raíz cuadrada positiva. Por tanto, $\sqrt{25} = 5$.
(b) $-(25)^{1/2}$ significa encontrar $25^{1/2}$ y anteponerle el signo negativo. Por tanto se tiene $-\sqrt{25} = -5$.
(c) $(-25)^{1/2}$ significa $\sqrt{-25}$, que no es un número real, ya que no hay ningún número real que multiplicado por sí mismo sea igual a -25.

Ejemplo 5

Simplificar las expresiones siguientes:

(a) $8^{1/3}$
(b) $-(8^{1/3})$
(c) $(-8)^{1/3}$

Solución

(a) $8^{1/3}$ significa $\sqrt[3]{8} = 2$.
(b) $-(8^{1/3})$ significa encontrar $8^{1/3}$ y anteponerle el signo negativo. Por tanto se tiene $-\sqrt[3]{8} = -2$.
(c) $(-8)^{1/3}$ significa $\sqrt[3]{-8}$, que es -2, ya que $(-2)(-2)(-2) = -8$.

La décima y última regla de exponentes permite simplificar una expresión que contenga un exponente fraccionario con un numerador diferente de 1.

Ejemplo 6

Simplificar $8^{2/3}$.

Solución

Por la regla 6 se tiene $8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$. También es válido el siguiente procedimiento: $8^{2/3} = (8^2)^{1/3} = \sqrt[3]{(8^2)} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Regla de exponentes

Si x es un número real y m y n son enteros tales que $n > 0$,

$$x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{(x^m)} \text{ donde } \sqrt[n]{x} \text{ está definida} \qquad (10)$$

El exponente fraccionario consta de dos partes: el denominador, que indica la raíz que debe extraerse, y el numerador, que indica la potenciación que debe realizarse. Siempre que sea posible, primero debe extraerse la raíz. Por ejemplo, considérese $64^{4/3}$. Si se empieza por extraer la raíz, se tiene $64^{4/3} = (\sqrt[3]{64})^4 = 4^4 = 256$. Pero si primero se efectúa la potenciación, se tiene $64^{4/3} = \sqrt[3]{(64^4)} = \sqrt[3]{16\,777\,216}$, que es también 256, aunque quizás no sea posible saberlo a primera vista.

Ejemplo 7

Simplificar $7^{3/5}$.

Solución

En este caso no es posible empezar por obtener la raíz, porque se desconoce el valor de $\sqrt[5]{7}$, a pesar de saber que está definido en el sistema de los números reales. Por tanto, se efectúa la potenciación primero y se dice $7^{3/5} = \sqrt[5]{(7^3)} = \sqrt[5]{343}$.

En los ejemplos siguientes se revisan las reglas de exponentes de esta sección.

Ejemplo 8

Simplificar:

(a) $(3^2)^4$
(b) $(2xy)^3$
(c) $(2/3)^2$

Solución

(a) $(3^2)^4 = 3^8$ por la regla 6. .
(b) $(2xy)^3 = 2^3x^3y^3 = 8x^3y^3$ por la regla 7.
(c) $(2/3)^2 = 2^2/3^2 = 4/9$ por la regla 8.

Ejemplo 9

Simplificar:

(a) $(3a^2b)^3$
(b) $4(x^{-2}y)^{-1}$
(c) $\left(\dfrac{2a^{-1}b^2}{3^2xy^{-2}}\right)^3$

Solución

(a) Por la regla 7, $(3a^2\ b)^3 = 3^3\ (a^2)^3\ b^3$, que es $27a^6\ b^3$.

(b) Por la regla 7, $4(x^{-2}\ y)^{-1} = 4(x^{-2})^{-1}\ (y)^{-1}$, que es $4x^2\ y^{-1}$ por la regla 6. Finalmente se tiene $\dfrac{4x^2}{y}$

(c) $\left(\dfrac{2a^{-1}b^2)}{3^2xy^{-2}}\right)^3 = \dfrac{2^3a^{-3}b^6}{3^6x^3y^{-6}}$, que es $\dfrac{2^3b^6y^6}{3^6a^3x^3}$.

Ejemplo 10

Simplificar. Puede suponerse que todas las variables representan números reales positivos.

(a) $\left(\dfrac{4}{9x^4}\right)^{1/2}$
(b) $\left(\dfrac{8a^3}{27}\right)^{-2/3}$
(c) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{2/3}$

Solución

(a) $\left(\dfrac{4}{9x^4}\right)^{1/2} = \dfrac{4^{1/2}}{(9x^4)^{1/2}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9x^4}} = \dfrac{2}{3x^2}$

(b) $\left(\dfrac{8a^3}{27}\right)^{-2/3} = \dfrac{(8a^3)^{-2/3}}{27^{-2/3}} = \dfrac{27^{2/3}}{(8a^3)^{2/3}} = \dfrac{(\sqrt[3]{27})^2}{(\sqrt[3]{8a^3})^2} = \dfrac{3^2}{(2a)^2} = \dfrac{9}{4a^2}$

(c) $\left(\frac{5}{7}\right)^{2/3} = \frac{5^{2/3}}{7^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{(5^2)}}{\sqrt[3]{(7^2)}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{49}}$

Ejercicios

Simplificar las expresiones siguientes aplicando la regla 6. Ver el ejemplo 1.

1. $(a^2)^3$ **2.** $(3^4)^5$ **3.** $(2^3)^4$ **4.** $(x^2)^4$ **5.** $(5^3)^3$

Simplificar las expresiones siguientes aplicando la regla 7. Ver el ejemplo 2.

6. $(xy)^3$ **7.** $(3a)^2$ **8.** $(5xy)^3$ **9.** $(4b)^2$ **10.** $(ab)^5$

Simplificar las expresiones siguientes aplicando la regla 8. Ver el ejemplo 3.

11. $\left(\frac{2}{x}\right)^3$ **12.** $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ **13.** $\left(\frac{y}{6}\right)^5$ **14.** $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ **15.** $\left(\frac{a}{b}\right)^4$

Simplificar las expresiones siguientes aplicando la regla 9. Ver los ejemplos 4 y 5.

16. $16^{1/2}$ **17.** $(-16)^{1/2}$ **18.** $-(16^{1/2})$ **19.** $27^{1/3}$ **20.** $(-27)^{1/3}$
21. $-(27^{1/3})$ **22.** $(64^{1/2})$ **23.** $(64^{1/3})$ **24.** $(-64)^{1/3}$ **25.** $(-64)^{1/2}$

Simplificar las expresiones siguientes aplicando la regla 10. Ver los ejemplos 6 y 7.

26. $64^{2/3}$ **27.** $27^{2/3}$ **28.** $4^{2/3}$ **29.** $5^{3/4}$ **30.** $81^{3/4}$

Simplificar las expresiones siguientes. En la respuesta final no deben aparecer exponentes negativos. Ver los ejemplos 8 y 9.

31. $(x^2y)^4$ **32.** $(2a^5b)^3$ **33.** $3(x^2y^{-1})^3$ **34.** $2(a^5b)^3$
35. $(5xy)^{-1}$ **36.** $5(xy)^{-1}$ **37.** $\left(\frac{3b}{4}\right)^2$ **38.** $\left(\frac{2x}{y}\right)^3$
39. $\left(\frac{4b^2}{5}\right)^3$ **40.** $\left(\frac{2x^2}{7}\right)^2$ **41.** $\left(\frac{x}{y^3}\right)^{-1}$ **42.** $\frac{3(ab)^{-2}}{5}$
43. $\frac{3ab^{-2}}{5}$ **44.** $\left(\frac{5ab^{-1}}{c^2}\right)^3$ **45.** $\left(\frac{2ab^{-1}}{c^2}\right)^{-3}$ **46.** $\left(\frac{7xy^{-1}}{3^{-1}ab}\right)^{-2}$
47. $\left(\frac{4a^{-1}b}{3a^{-2}b}\right)^2$ **48.** $\left(\frac{7xy^{-1}}{3^{-1}x^2y^0}\right)^0$ **49.** $\frac{2^{-1}ab^2}{3a^{-2}b^{-1}}$ **50.** $\frac{2a^{-1}b^2}{3^{-1}xy^{-3}}$

Simplificar las expresiones siguientes. Puede suponerse que todas las variables representan números reales positivos. Ver el ejemplo 10.

51. $\left(\frac{16}{25}\right)^{1/2}$ 52. $\left(\frac{27}{64}\right)^{-1/3}$ 53. $\left(\frac{x^4}{16}\right)^{3/4}$

54. $\left(\frac{25}{49b^2}\right)^{-1/2}$ 55. $\left(\frac{a^{-2}}{9}\right)^{3/2}$ 56. $\left(\frac{x^{-3}}{8y^6}\right)^{1/3}$

Simplificar las expresiones siguientes.

*57. $\sqrt{5}\sqrt[3]{5}$

*58. $\sqrt{3}\sqrt[3]{2}$

*59. ¿Cuál de las dos raíces es mayor $\sqrt[10]{10}$ o $\sqrt[3]{2}$?

5.3. ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En el presente capítulo se usarán con frecuencia las palabras *término y factor.* En una expresión que contiene una adición (o una sustracción, ya que para restar x, se suma $-x$), a los operandos se les llama *términos*. En una expresión que contiene una multiplicación, a los operandos se les llama *factores*. Así, se dice que $x + y$ tiene dos términos y que xy tiene dos factores.

La distinción entre términos y factores es importante en una expresión como $2x + 3y$, en la que interviene tanto la adición como la multiplicación. Si se conocieran los valores de x y y, esta expresión podría evaluarse siguiendo el orden de las operaciones. La última operación que se realizaría sería la adición, por lo que se dice que esta expresión tiene dos términos. Cada término en sí mismo tiene dos factores. En la expresión $(x + 2)(x - 1)$, si se conociera el valor de x, la última operación que se realizaría sería la multiplicación, por lo que se dice que esta expresión tiene dos factores. Cada factor tiene dos términos.

Definición

Términos son las expresiones algebraicas que deben sumarse. *Factores* son las expresiones algebraicas que deben multiplicarse.

Ejemplo 1

Determinar el número de términos o factores de cada expresión.

(a) $2xy - 3$
(b) $x^2 - 4x + 1$
(c) $(x + 2)(3 - 4y)$
(d) $x(x - 1)(x - 2)$

Solución

(a) $2xy - 3$ tiene dos términos. Éstos son $2xy$ y -3. (Restar 3 equivale a sumar -3.)
(b) $x^2 - 4x + 1$ tiene tres términos. Éstos son x^2, $-4x$ y 1.
(c) $(x + 2)(3 - 4y)$ tiene dos factores. Éstos son $(x + 2)$ y $(3 - 4y)$.
(d) $x(x - 1)(x - 2)$ tiene tres factores. Éstos son x, $(x - 1)$ y $(x - 2)$.

Con frecuencia, se hace referencia a los *términos semejantes* de una expresión algebraica. Los términos semejantes deben contener las mismas variables elevadas a potencias iguales. Por ejemplo, se dice que en la expresión $3x + 4y - x + 5y$, $3x$ y $-x$ son términos semejantes, y que $4y$ y $5y$ también lo son.

Definición

Los *términos semejantes* de una expresión algebraica son aquellos que contienen las mismas variables elevadas a las mismas potencias.

Ejemplo 2

Señalar los términos semejantes de las expresiones siguientes.

(a) $3x^2 + x - 1 + 4x^2$
(b) $3x + 4y - 3y - 1$
(c) $4ab + 2bc + 7ab$
(d) $3a^2b + 3ab^2 - a^2b$

Solución

(a) $3x^2$ y $4x^2$ son términos semejantes porque ambos contienen x elevada a la segunda potencia.
(b) $4y$ y $-3y$ son términos semejantes porque ambos contienen y elevada a la primera potencia.
(c) $4ab$ y $7ab$ son términos semejantes porque ambos contienen ab.
(d) $3a^2b$ y $-a^2b$ son términos semejantes porque ambos contienen a^2 y b.

Es posible aplicar la propiedad distributiva para simplificar un problema de suma o resta. Por ejemplo, $3x + 4x = (3 + 4)x$. A fin de abreviar, se dice que como $3x$ y $4x$ son términos semejantes, pueden reducirse para obtenerse $7x$.

Para sumar o restar expresiones algebraicas:

1. Se localizan los términos semejantes.
2. Se efectúa la suma o resta, según sea el caso.
3. La suma tendrá las mismas variables y exponentes que los términos.

Ejemplo 3

Sumar las siguientes expresiones algebraicas.

(a) $3x + 4y - x + 5y$
(b) $3x^2 + x - 1 + 4x$
(c) $4ab + 2bc + 7ab$
(d) $3a^2b + 3ab^2 - a^2b$

Solución

(a) $3x + 4y - x + 5y = 3x - x + 4y + 5y = 2x + 9y$
(b) $3x^2 + x - 1 + 4x = 3x^2 + x + 4x - 1 = 3x^2 + 5x - 1$
(c) $4ab + 2bc + 7ab = 4ab + 7ab + 2bc = 11ab + 2bc$
(d) $3a^2b + 3ab - a^2b = 3a^2b - a^2b + 3ab = 2a^2b + 3ab$

Con frecuencia, en los problemas de suma y resta intervienen signos de agrupación. Se sigue el orden general de las operaciones, efectuando primero, *de ser posible,* las operaciones que se encuentran dentro de los signos de agrupación. Sin embargo, no es posible reducir los términos comprendidos en signos de agrupación de una expresión algebraica a menos que sean semejantes. Quizás sea necesario reordenarlos y reagruparlos, como se hizo en el ejemplo 3, a fin de reunir los términos semejantes.

Ejemplo 4

Sumar las siguientes expresiones algebraicas:

(a) $(x^2 + x - 1) + (2x^2 + 3x - 4)$
(b) $(2x + y - 1) + (3y - 4z + 2)$

Solución

(a) Puesto que no pueden realizarse las operaciones entre paréntesis, se hace la reordenación y reagrupación para reunir los términos semejantes: $x^2 + 2x^2 + x + 3x - 1 - 4 = 3x^2 + 4x - 5$.
(b) Puesto que no pueden realizarse las operaciones entre paréntesis, se hace la reordenación y reagrupación para reunir los términos semejantes: $2x + y + 3y - 4z - 1 + 2 = 2x + 4y - 4z + 1$.

En los problemas de sustracción puede ser necesario aplicar la propiedad distributiva antes de reducir los términos semejantes. Es decir, una expresión como $-(x + 3)$ puede escribirse en la forma $-1(x + 3)$ y, en consecuencia, es igual a $-x - 3$.

Ejemplo 5

Restar las siguientes expresiones algebraicas:

(a) $(x^2 + x - 1) - (2x^2 + 3x + 4)$
(b) $(2x + y - 1) - (3y - 4z + 2)$

Solución

(a) Puesto que no pueden realizarse las operaciones entre paréntesis, se aplica la propiedad distributiva: $x^2 + x - 1 - 2x^2 - 3x - 4$. Entonces pueden reducirse los términos semejantes para obtener $-x^2 - 2x - 5$.
(b) Se aplica la propiedad distributiva: $2x + y - 1 - 3y + 4z - 2$.

Se reducen los términos semejantes para obtener $2x - 2y + 4z - 3$.

La multiplicación de expresiones algebraicas se basa en la propiedad distributiva. Por ejemplo, $2(x + 3) = 2x + 6$. Cuando ambos factores tienen dos términos o más, cada uno de los términos del primer factor se distribuye en el segundo factor. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= x(x - 3) + 2(x - 3)\\ &= x^2 - 3x + 2x - 6\\ &= x^2 - x - 6.\end{aligned}$$

En particular, en los problemas largos, es conveniente agrupar los términos semejantes conforme se realiza la multiplicación.
El producto $(x + 2)(x - 3)$ podría escribirse como

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x \\ \quad + 2x - 6 \\ \hline x^2 - x - 6. \end{array}$$

Para multiplicar dos expresiones algebraicas:

1. Se multiplica cada término del primer factor por el segundo factor aplicando la propiedad distributiva. Los términos semejantes se ordenan en columnas conforme se realiza la multiplicación.

2. Se reducen los términos semejantes.

Multiplicar $(x - 5)(x + 4)$. **Ejemplo 6**

Solución

$$\begin{aligned} (x - 5)(x + 4) &= x^2 + 4x && \text{de } x\,(x + 4) \\ &\quad\ - 5x - 20 && \text{de } -5(x + 4). \\ \hline &x^2 - x - 20 && \text{al reducir términos semejantes} \end{aligned}$$

Multiplicar $(2x - 1)(3x + 1)$. **Ejemplo 7**

Solución

$$\begin{aligned} (2x - 1)(3x + 1) &= 6x^2 + 2x && \text{de } 2x(3x + 1) \\ &\quad\ - 3x - 1 && \text{de } -1(3x + 1) \\ \hline &6x^2 - x - 1 && \text{al reducir términos semejantes} \end{aligned}$$

Multiplicar $(x + 2)(x^2 - x + 1)$ **Ejemplo 8**

Solución

$$\begin{aligned} (x + 2)(x^2 - x + 1) &= x^3 - x^2 + x && \text{de } x(x^2 - x + 1) \\ &\quad\ + 2x^2 - 2x + 2 && \text{de } 2(x^2 - x + 1) \\ \hline &x^3 + x^2 - x + 2 && \text{al reducir términos semejantes} \end{aligned}$$

las x están en una columna

las x^2 están en una columna

Multiplicar $(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1)$. **Ejemplo 9**

Solución

$(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = x^4 - x^3 + x^2$		de $x^2(x^2 - x + 1)$
	$+ x^3 - x^2 + x$	de $x(x^2 - x + 1)$
	$- x^2 + x - 1$	de $-1(x^2 - x + 1)$
x^4	$- x^2 + 2x - 1$	al reducir términos semejantes.

Ejemplo 10

Multiplicar $(x + 2)^3$.

Solución

$(x + 2)^3 =$	$(x + 2)(x + 2)(x + 2)$	
	$(x + 2)[(x + 2)(x + 2)]$	al agrupar los dos últimos factores de la multiplicación
	$(x + 2)[x^2 + 2x + 2x + 4]$	
	$(x + 2)[x^2 + 4x + 4]$	
	$x^3 + 4x^2 + 4x$	de $x(x^2 + 4x + 4)$
	$+ 2x^2 + 8x + 8$	de $2(x^2 + 4x + 4)$
	$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$	al reducir términos semejantes

En problemas más largos se sigue el orden general de las operaciones.

Ejemplo 11

Simplificar las expresiones siguientes:

(a) $2(3x + 3) + (3x - 1)$
(b) $x(2x + 3) - (3x - 1)$
(c) $(2x + 3)(3x - 1) + 1$

Solución

(a) $2(3x + 3) + (3x - 1)$	ya que las operaciones entre paréntesis no pueden realizarse
$6x + 6 + 3x - 1$	por la propiedad distributiva
$6x + 3x + 6 - 1$	al reordenar y reagrupar términos semejantes
$9x + 5$	al reducir términos semejantes

(b) $x(2x + 3) - (3x - 1)$ ya que las operaciones entre paréntesis no pueden realizarse

$2x^2 + 3x - 3x + 1$ por la propiedad distributiva

$2x^2 + 3x - 3x + 1$ al agrupar términos semejantes

$2x^2 + 1$ al reducir términos semejantes

(c) $(2x + 3)(3x - 1) + 1$ ya que las operaciones entre paréntesis no pueden realizarse

$6x^2 - 2x + 9x - 3 + 1$ de $(2x + 3)(3x - 1)$

$6x^2 - 2x + 9x - 3 + 1$ al agrupar términos semejantes

$6x^2 + 7x - 2$ al reducir términos semejantes

Ejercicios

Determinar el número de términos o factores en las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 1.

1. $(x + 1)(x - 3)$
2. $4(y - 5)$
3. $2x + 3y$
4. $4a + 3$
5. $7x^2 + 3x + 2$
6. $(5a - 2)(7a^2 + 3a + 2)$
7. $(4y + 3)(y^2 - y - 5)$
8. $(b + 1)(b - 2)(b - 3)$
9. $(x - 1)(x + 2) - (x + 1)(x - 2)$
10. $x(2x - 3) + x(3x + 1)$

Realizar la suma o resta, según sea el caso. Ver los ejemplos 4 y 5.

11. $(2x + 3y) + (x - y)$
12. $(3a + 2b) - (a - b)$
13. $(3x - 1) - (2 - y)$
14. $(7a + 3) + (b - 2)$
15. $(x^2 + 4x - 1) + (3x^2 - 5x + 2)$
16. $(2y^2 + 5y - 3) - (2y^2 - 4y + 1)$
17. $(3a^2 + 7a - 4) - (2a - 1)$
18. $(3x + 4y - z) + (2x - y + w)$
19. $(2x - 1) - (x - 4)$
20. $(3z^2 + 2z - 1) - (z^2 - z - 4)$

Realizar las multiplicaciones. Ver los ejemplos 6 al 10.

21. $2x(x - 1)$
22. $3a(2a + 5)$
23. $3x(x^2 - x + 4)$
24. $y^3(2y^2 + y - 3)$
25. $(x + 1)(2x - 3)$
26. $(2a + 3b)(4a + 3b)$

27. $(3y - 4)(5y - 1)$
28. $(x + 1)(x - 1)$
29. $(x - 5y)(x - 2y)$
30. $(4a + b)(4a + b)$
31. $(2x - 3)(3x^2 - 2x + 1)$
32. $(z - 1)(z^2 + z + 1)$
33. $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
34. $(2y + 1)(4y^2 - 4y + 1)$
35. $(a - 2)(3a^2 + 4a - 5)$
36. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
37. $(y^2 - 2y + 1)(y^2 + 3y - 2)$
38. $(2b^2 - b + 3)(b^2 + 3b - 2)$
39. $(2x + 1)^3$
40. $(3x - 2y)^3$

Simplificar las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 11.

41. $x(x - 2) + (3x - 1)$
42. $(2x + 3) - 3(x - 2)$
43. $(x^2 + 2x - 1) - 3(x + 2)$
44. $(x^2 + 2x - 1) - x(x + 2)$
45. $(x + 1)(x - 1) - 3$
46. $(x + 2)(x + 1) - x$
47. $(2x + 1)(3x - 2) + (x - 4)$
48. $(2x - 1)(2x - 3) - x^2$

5.4. FACTORIZACIÓN

En los problemas de la sección anterior se partió de expresiones que contenían *factores* y se rescribieron como expresiones que contenían *términos*. De hecho, el producto casi siempre resultó ser un tipo especial de expresión algebraica llamada *polinomio*. Aquí sólo se considerarán polinomios con una variable.

Definición

Un *polinomio* con una variable es una expresión de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \in R$ y $n \in I$, $n \geqslant 0$. Se dice que n es el *grado* del polinomio y que los valores $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ son los *coeficientes*. Al número a_n se le llama coeficiente *principal*.

En esta sección se partirá de polinomios (por ejemplo, expresiones que contienen *términos*) y se rescribirán como expresiones que contienen *factores*. Este proceso se llama *factorización*. Todos los polinomios tendrán coeficientes enteros y los factores deben tener coeficientes enteros.

El primer paso en cualquier problema de factorización es buscar un factor común. Cuando hay un factor común a *todos* los términos del polinomio, se aplica la propiedad distributiva. En el polinomio $2x + 6$ el 6 puede pensarse como $2(3)$. Puede verse ahora que cada término tiene un factor 2 y se dice entonces que el 2 es un factor común. Es decir, $2x + 6 = 2(x) + 2(3) = 2(x + 3)$ por la propiedad distributiva.

Ejemplo 1

Sacar el factor común de los polinomios siguientes.

(a) $3x + 9$
(b) $2x^2 + 4x + 4$
(c) $6x^3 + 3x^2 - 9x$

Solución

(a) $3x + 9 = 3(x) + 3(3) = 3(x + 3)$
(b) $2x^2 + 4x + 4 = 2(x^2) + 2(2x) + 2(2) = 2(x^2 + 2x + 2)$
(c) $6x^3 + 3x^2 - 9x = 3x(2x^2) + 3x(x) + 3x(-3) = 3x(2x^2 + x - 3)$

En la sección anterior, los productos que asumieron la forma de polinomios fueron resultado casi siempre de la aplicación repetida de la propiedad distributiva. En particular, los *trinomios* (polinomios que tienen tres términos) resultaron de una aplicación doble de la propiedad distributiva. Los factores eran *binomios* (polinomios con dos términos). Por ejemplo, $(x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$.

Supóngase que un problema consiste en partir de $x^2 + x - 6$ y factorizarla. Como no hay ningún factor común, la factorización se hace considerando el trinomio como el producto de dos binomios. Es sencillo ver cómo se factorizaría el primer término, x^2, como $x(x)$. También es fácil ver cómo se factorizaría el último término, -6, como $3(-2)$. Así, podría "conjeturarse" que $(x + 3)$ y $(x - 2)$ son los dos factores. Sin embargo, aún no se considera el término de enmedio. Si se verifica la conjetura realizada, se ve que los dos factores no sólo producen correctamente el primero y el último términos, sino también el de enmedio.

Para factorizar un trinomio:

1. Se sacan los factores comunes que haya. Para factorizar el trinomio que queda:
2. Se factoriza el primer término para obtener el primer término de cada factor.
3. Se factoriza el último término para obtener el ultimo término de cada factor.
4. Se pone un signo entre los términos de cada factor.
5. Se verifica el término de enmedio. Si es incorrecto, se prueba con otros signos.

Al proceso de factorizar trinomios suele llamársele factorización "por tanteo" o "por aproximaciones sucesivas". Conforme el lector conozca este tipo de problemas encontrará que las suposiciones incorrectas se reducirán y que, con frecuencia, se "supondrán" los factores correctos al primer o segundo intento. El lector debe recurrir a las sugerencias siguientes al estudiar los ejemplos de esta sección.

Sugerencias para factorizar trinomios

a. Es necesario ser sistemático. En caso de duda en cuanto a qué factores usar en los pasos 2 y 3, deberán elegirse los dos con la diferencia menor. Si esa combinación es incorrecta, probar con los dos factores que tengan la diferencia menor siguiente, y así sucesivamente.

b. No deben colocarse dos términos con un factor común dentro del mismo paréntesis. En caso de haber un factor común, éste debería haberse sacado en el primer paso.

c. Si el último término del trinomio es positivo, los dos signos son iguales al del término de enmedio.

d. Si el último término del trinomio es negativo, los dos signos son diferentes.

e. Si el término de enmedio es incorrecto tan sólo por el signo, basta intercambiar los signos de los términos de los factores.

En los ejemplos siguientes se usan estas sugerencias.

Ejemplo 2

Factorizar $y^2 - 3y + 2$.

Solución

Puesto que $y^2 = (y)(y)$, y $2 = (2)(1)$, se tiene $(y\ 2)(y\ 1)$. Ambos signos son negativos (ver la sugerencia c), de modo que la primera conjetura es $(y - 2)(y - 1)$, que es correcta, pues el término de enmedio es $-y - 2y = -3y$.

Ejemplo 3

Factorizar $2x^2 + 9x + 4$.

Solución

Se factoriza $2x^2$ como $(2x)(x)$, y 4 como $(1)(4)$. Aun cuando el último término también podría factorizarse como $(2)(2)$, con una

diferencia de 0, se sabe que $(2x + 2)(x + 2)$ no funcionará (ver la sugerencia b). La primera conjetura es $(2x + 1)(x + 4)$, que es correcta.

Ejemplo 4

Factorizar $8a^2 + 22a - 6$.

Solución

Se empieza con $2(4a^2 + 11a - 3)$. Se factoriza $4a^2$ como $(2a)(2a)$ y 3 como (3) (1). La primera conjetura es $2(2a - 3)(2a + 1)$, pero el término de enmedio es $2a - 6a = -4a$, que es incorrecto. Ya no hay otro par de factores del último término que probar. Se factoriza $4a^2$ como $(a)(4a)$ y se prueba $2(a + 3)(4a - 1)$. El término de enmedio es $-a + 12a = 11a$, que es correcto.

Ejemplo 5

Factorizar $6m^2 + 35m - 6$.

Solución

Se factoriza $6m^2$ como $(2m)(3m)$ y 6 como (3) (2), utilizando los factores con la diferencia menor. La primera conclusión es $(2m + 3)(3m - 2)$, pero el término de enmedio es incorrecto. No es necesario factorizar el último término como (1) (6), porque 6 no puede ponerse en el mismo paréntesis con $2m$ ni con $3m$ (ver sugerencia b). La segunda conjetura es $(6m + 1)(m - 6)$, pero el término de enmedio es $-36m + m = -35m$, que difiere en el signo. La respuesta correcta es $(6m - 1)(m + 6)$ (ver sugerencia e).

Algunos binomios pueden considerarse como trinomios con el término de enmedio igual a cero. Por ejemplo, $x - 9 = x^2 + 0x - 9$, que puede factorizarse como $(x - 3)(x + 3)$.

Ejemplo 6

Factorizar $4y^2 - 25$.

Solución

La primera conjetura es $(2y + 5)(2y - 5)$, que es correcta.

A este binomio se le llama *diferencia de cuadrados* porque $4y^2$ es el cuadrado de $2y$, 25 es el cuadrado de 5, y la sustracción indica una diferencia. Cualquier binomio que sea una diferencia de cuadrados seguirá el patrón

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Ejemplo 7

Factorizar $4p^2 - 100$.

Solución

Se empieza con $4(p^2 - 25)$. Se intenta $4(p - 5)(p + 5)$, que es correcto.

Hay algunos polinomios que no pueden factorizarse utilizando coeficientes enteros.

Factorizar, si es posible, $x^2 - x + 1$. **Ejemplo 8**

Solución

Se prueba $(x - 1)(x - 1)$, pero el término de enmedio es incorrecto. Ya no hay más posibilidades que probar. Se dice que $x^2 - x + 1$ es *primo,* porque no hay un factor común entero (además de ± 1) ni tampoco factores no constantes [además de $\pm (x^2 - x + 1)$].

Factorizar, si es posible, $3x^2 + 2x - 6$. **Ejemplo 9**

Solución

Todas las posibilidades se enlistan sistemáticamente. Ninguna de ellas es correcta.

$(3x - 2)(x + 3)$, pero el término de enmedio es $7x$.
[No es necesario probar $(3x + 2)(x - 3)$. Ver la sugerencia e.]
$(3x - 1)(x + 6)$, pero el término de enmedio es $17x$.
[No es necesario probar $(3x + 1)(x - 6)$. Ver la sugerencia e.]
Se concluye que $3x^2 + 2x - 6$ es primo.

Ejercicios

Factorizar, si es posible, las expresiones siguientes. Ver los ejemplos 1 al 9.

1. $2x^2 + 2x$	**2.** $y^4 + 3y^3$	**3.** $3m^3 - 3m^2 + 6m$
4. $5p^6 - 15p^3$	**5.** $x^2 + 5x + 6$	**6.** $a^2 - 7a + 12$
7. $z^2 - z - 6$	**8.** $x^2 + x - 12$	**9.** $p^2 + 10p + 24$
10. $m^2 - 2m - 24$	**11.** $y^2 - 11y + 24$	**12.** $x^2 + 9x + 7$
13. $6z^2 - 13z + 6$	**14.** $6a^2 - 13a - 5$	**15.** $5x^2 + 26x + 5$
16. $3m^2 - 5m + 2$	**17.** $12p^2 + 7p - 12$	**18.** $12y^2 + 18y - 12$
19. $3x^2 - 12x + 12$	**20.** $5a^2 + 10a + 5$	**21.** $z^2 + 5z - 24$
22. $16y^2 - 25$	**23.** $4m^2 - 16$	**24.** $x^2 + 9$
25. $25p^2 + 36$	**26.** $3a^3 + 9a$	**27.** $4y^3 + 8y^2$
28. $21x^5 + 7x^3$	**29.** $p^2 + 9p + 20$	**30.** $z^2 - z - 20$
31. $m^2 - 8m + 15$	**32.** $m^2 + 2m - 15$	**33.** $2a^2 - 24a + 40$
34. $3x^2 - 48x + 45$	**35.** $6a^2 - 7a - 5$	**36.** $3y^2 + 10y + 8$
37. $2m^2 - 3m - 9$	**38.** $6x^2 - 11x + 4$	**39.** $m^2 + 3m + 1$
40. $y^2 - 5y - 12$	**41.** $9x^2 - 4$	**42.** $4x^2 + 9$

*43. Aplicar el algoritmo siguiente utilizando los polinomios de los problemas 10, 13 y 16.

1. Sacar los factores comunes en caso de haberlos.

Para factorizar el trinomio que queda:

2. Usar el coeficiente del término principal como coeficiente principal en *ambos* factores binomiales.
3. Multiplicar el último término del trinomio por el coeficiente principal. Escoger dos factores de este producto que tengan por suma el término de enmedio. Usar estos factores como términos finales de los dos factores binomiales.
4. Localizar y descartar los factores comunes de los factores binomiales —*e.g.*, $8a^2 + 22a - 6 = 2(4a^2 + 11a - 3)$. Dado que $4(-3) = -12$, se buscan los factores de -12 cuya suma sea $+11$. Se usa $12(-1)$. Pero $2(4a + 12)(4a - 1)$ es incorrecto. Al eliminar el factor común 4 se tiene $2(a + 3)(4a - 1)$.

5.5. EXPRESIONES RACIONALES

En el capítulo 2 se definió un *número* racional como aquel que puede expresarse como el cociente de dos enteros, siempre que el denominador no sea cero. Una *expresión* racional se define de manera semejante.

Definición

Una *expresión racional* es el cociente indicado de dos polinomios, tal que el denominador sea diferente de cero.

Las expresiones racionales tienen mucho en común con los números racionales en forma de fracción. Para reducir una fracción (o una expresión racional), se divide el numerador y el denominador entre todos los factores comunes que tengan. Cuando una fracción (o una expresión racional) no puede reducirse, se dice que está en su *mínima expresión*.

Se examinarán primero estos conceptos aplicándolos a fracciones. Una forma de reducir fracciones es escribir el numerador y el denominador como productos de números primos. Un *número primo* es un entero mayor que 1 tal que los únicos enteros positivos que lo dividen exactamente son 1 y el propio número. Cuando se trate de números relativamente pequeños quizá no será necesario seguir todos estos pasos. Pero cuando los números sean grandes, el método es un medio conveniente para encontrar todos los factores que dividen al numerador y al denominador.

Ejemplo 1

Reducir $\frac{143}{195}$.

Solución

Se factoriza el numerador y el denominador: $143 = 11(13)$ y $195 = 3(65)$, pero 65 no es un número primo. Al sustituir 65 por $5(13)$ se tiene $195 = 3(5)(13)$. Se divide el numerador y el denominador entre 13. Es decir, $13 \div 13 = 1$. Así,

$$\frac{143}{195} = \frac{11 \cdot 13}{3 \cdot 65} = \frac{11 \cdot \overset{1}{\cancel{13}}}{3 \cdot 5 \cdot \underset{1}{\cancel{13}}} = \frac{11}{15}.$$

Ejemplo 2

Reducir $\frac{240}{200}$.

Solución

$$\frac{240}{200} = \frac{10 \cdot 24}{10 \cdot 20} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\overset{1}{\cancel{5}}3\overset{1}{\cancel{2}}\overset{1}{\cancel{2}}2}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{5}}\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{2}}5} = \frac{6}{5}.$$

El proceso de cancelación usado en los ejemplos precedentes se basa en el hecho de que $a/a = 1$ si $a \in R$ y $a \neq 0$. Puesto que 1 es el neutro multiplicativo, no afecta a los factores restantes. Es decir, al cancelar factores idénticos en el numerador y el denominador, en realidad, se está eliminando un factor 1 de la fracción. Es esencial que se cancelen *factores* del numerador y el denominador y no *términos*, ya que 1 *no* es el neutro aditivo. Se usa el mismo método para reducir expresiones racionales a su mínima expresión.

Para reducir una expresión racional:

1. Se factorizan el numerador y el denominador.
2. Se cancelan los *factores* que aparecen en el numerador y en el denominador.
3. Se multiplican los factores restantes del numerador para obtener el numerador de la expresión reducida. Se multiplican los factores restantes del denominador para obtener el denominador de la expresión reducida.
4. En este capítulo puede suponerse que los denominadores son diferentes de cero.

Ejemplo 3

Reducir $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$.

Solución

Se factorizan numerador y denominador: $\dfrac{(x - 3)(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)}$.

Se cancelan los factores idénticos: $\dfrac{\overset{1}{\cancel{(x-3)}}(x - 3)}{\underset{1}{\cancel{(x-3)}}(x + 3)} = \dfrac{(x - 3)}{(x + 3)}$.

Ejemplo 4

Reducir $\dfrac{y^2 - 2y}{2y - 4}$

Solución

Se factorizan numerador y denominador: $\dfrac{y(y - 2)}{2(y - 2)}$.

Se cancelan los factores idénticos: $\dfrac{\overset{1}{\cancel{y(y-2)}}}{\underset{1}{\cancel{2(y-2)}}} = \dfrac{y}{2}$.

Ejemplo 5

Reducir $\dfrac{6x^2}{3x}$.

Solución

$6x^2 = 2(3)(x)(x)$, y 3 y x son los factores.

Se cancelan los factores idénticos: $\dfrac{6x^2}{3x} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}}} = 2x.$

Ejemplo 6

Reducir $\dfrac{z^2 + 6}{z + 3}$.

Solución

$z^2 + 6$ es primo, y $z + 3$ es primo. Puesto que el numerador y el denominador se componen cada uno de dos *términos*, la expresión

no puede reducirse. Es decir, $\frac{z^2 + 6}{z + 3}$ está en su mínima expresión.

Cuando se multiplican números racionales se puede efectuar la multiplicación y reducir después; o se puede hacer la reducción y multiplicar a continuación. Por lo general, el segundo proceso es más sencillo porque los números son más pequeños.

Ejemplo 7

Multiplicar $\frac{3}{4}\left(\frac{8}{9}\right)$.

Solución

Si se efectúa la multiplicación y después se reduce, entonces se tiene $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Si se reduce y después se multiplica, se tiene $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{1}}\left(\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{9}_{3}}\right) = \frac{2}{3}$.

Ejemplo 8

Multiplicar $\frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{7}\right)$.

Solución

Si se efectúa la multiplicación y después se reduce, se tiene

$$\frac{360}{840} = \frac{3}{7}$$

Si se reduce y después se multiplica, se tiene $\frac{3}{\cancel{4}_{1}}\left(\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\right)\left(\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{6}_{1}}\right)\left(\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{7}}\right) = \frac{3}{7}$.

Cuando se multiplican expresiones racionales, la diferencia en dificultad entre los dos procedimientos se acentúa aún más. Es mucho más sencillo factorizar numerador y denominador, reducir, y después efectuar la multiplicación.

Para multiplicar expresiones racionales:

1. Se factorizan los numeradores y los denominadores.
2. Se cancelan los *factores* que sean idénticos en un numerador y en un denominador. (No necesitan estar en la misma fracción.)
3. Se multiplican los factores restantes de los numeradores para obtener el numerador del producto; se multiplican los factores restantes de los denominadores para obtener el denominador del producto.

Ejemplo 9

Multiplicar $\dfrac{x+1}{x-2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+1}\right)$.

Solución

Se factorizan los numeradores y los denominadores:

$$\frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)(x+1)}.$$

Se cancelan los factores que son idénticos en un numerador y en un denominador:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{(x+1)}}\,\overset{1}{\cancel{(x-2)}}\,(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x-2)}}\,\underset{1}{\cancel{(x+1)}}\,(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Ejemplo 10

Multiplicar $\dfrac{m^2-m}{2}\left(\dfrac{m+1}{m}\right)$

Solución

Se factoriza y se reduce:

$$\frac{m(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)}{m} = \frac{\overset{1}{\cancel{m}}(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)}{\underset{1}{\cancel{m}}} = \frac{(m-1)(m+1)}{2}$$

$$= \frac{m^2-1}{2}$$

Ejemplo 11

Multiplicar $\dfrac{6a^2}{4a^2 - 1}\left(\dfrac{2a - 1}{3a}\right)$.

Solución

Se factoriza y se reduce:

$$\frac{2a(3a)}{(2a - 1)(2a + 1)}\,\frac{2a - 1}{3a} = \frac{\overset{1}{2a(3a)}}{(\underset{1}{2a - 1})(2a + 1)}\,\frac{\overset{1}{(2a - 1)}}{\underset{1}{3a}} = \frac{2a}{(2a + 1)}$$

Al dividir dos números racionales se usa la regla, "invertir el divisor y multiplicar". La misma regla se aplica a las expresiones racionales.

Para dividir expresiones racionales:

1. Se invierte el divisor.
2. Se multiplican como expresiones racionales.

Ejemplo 12

Dividir: $\dfrac{1}{2x + 3} \div \dfrac{5}{4x^2 - 9}$.

Solución

Se invierte el divisor para obtener: $\dfrac{1}{2x + 3}\left(\dfrac{4x^2 - 9}{5}\right)$.

Se factoriza y se reduce: $\dfrac{1}{\underset{1}{(2x + 3)}}\,\dfrac{(2x - 3)\overset{1}{(2x + 3)}}{5} = \dfrac{2x - 3}{5}$

Ejemplo 13

Dividir: $\dfrac{2p - 3}{3p + 2} \div \dfrac{2p + 3}{3p - 2}$.

Solución

Se invierte el divisor para obtener: $\dfrac{(2p - 3)}{(3p + 2)}\,\dfrac{(3p - 2)}{(2p + 3)}$.

Los numeradores y denominadores están factorizados, y no hay factores que sean idénticos en un numerador y en un denominador. Por lo tanto, la fracción no puede reducirse. La respuesta es

$$\frac{6p^2 - 4p \quad 9p + 6}{6p^2 + 9p + 4p + 6} = \frac{6p^2 - 13p + 6}{6p^2 + 13p + 6}.$$

Ejercicios

Reducir a su mínima expresión las fracciones siguientes. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. $\frac{140}{210}$ 2. $\frac{252}{315}$ 3. $\frac{60}{225}$ 4. $\frac{80}{96}$ 5. $\frac{108}{324}$

Reducir a su mínima expresión las expresiones siguientes. Ver los ejemplos 3 al 6.

6. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ 7. $\frac{y^2 + 5y + 6}{y^2 - y - 6}$ 8. $\frac{m^2 - m}{m^2 + m}$

9. $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 6x}$ 10. $\frac{p^2 - 8p + 7}{p^2 - 49}$ 11. $\frac{2z^2 - 5z - 12}{2z^2 - 7z - 15}$

12. $\frac{2x^2 - 3x - 2}{2x^2 - 5x - 3}$ 13. $\frac{3y^2 + 4y - 4}{3y^2 + y - 2}$ 14. $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

Efectuar las multiplicaciones siguientes. Ver los ejemplos 7 y 8.

15. $\frac{15}{14}\left(\frac{12}{35}\right)$ 16. $\frac{15}{14}\left(\frac{26}{33}\right)$ 17. $\frac{3}{7}\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{7}{10}\right)$

18. $\frac{2}{15}\left(\frac{27}{14}\right)\left(\frac{35}{54}\right)$ 19. $\frac{6}{35}\left(\frac{7}{36}\right)\left(30\right)$

Efectuar las multiplicaciones siguientes. Ver los ejemplos 9 al 11.

20. $\frac{x - 1}{x + 2}\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}\right)$ 21. $\frac{y^2 - y - 2}{y^2 + 2y - 3}\left(\frac{y^2 + y - 2}{y^2 + 3y + 2}\right)$

22. $\frac{z - 5}{4z^2 - 1}\left(\frac{2z + 1}{2z^2 - 10z}\right)$ 23. $\frac{m + 2}{m^2 - m - 6}\left(\frac{m^2 + 6m + 5}{m + 1}\right)$

24. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x} \left(\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)$ 25. $\dfrac{a^2 - 3a}{a - 2} \left(\dfrac{a^2 - 3a + 2}{a^3 + 4a^2 + 3a} \right)$

26. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 5x + 4} \left(\dfrac{x + 1}{x + 2} \right)$ 27. $\dfrac{p + 3}{p + 1} \left(\dfrac{p^2 - 2p - 3}{p^2 - 9} \right)$

28. $\dfrac{4y^2 - 1}{y + 2} \left(\dfrac{y^2 + 3y + 2}{4y^2 + 4y + 1} \right)$ 29. $\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x + 3} \left(\dfrac{x + 3}{2x^2 + 9x + 4} \right)$

Efectuar las divisiones siguientes. Ver los ejemplos 12 y 13.

30. $\dfrac{x + 1}{x^2 - 49} \div \dfrac{x^2 - 1}{x - 7}$ 31. $\dfrac{2z + 1}{3} \div \dfrac{8z + 4}{9}$

32. $\dfrac{6x^2 - 3y}{2y + 2} \div \dfrac{18y - 6}{y^2 + 2y}$ 33. $\dfrac{m^2 - 2m}{m + 1} \div \dfrac{m - 2}{m^2 + m}$

34. $\dfrac{a}{a^2 - 4} \div \dfrac{a + 2}{a^2 - 4a + 4}$ 35. $\dfrac{x - 2}{x + 3} \div \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$

36. $\dfrac{x + 1}{x - 2} \div \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

*37. Considérese la fracción $\dfrac{64}{16}$. Un estudiante que no entiende el proceso de cancelación escribe $\dfrac{\not{6}4}{\not{1}6} = 4$, que es la respuesta correcta.

(a) Presentar dos ejemplos que ilustren que este método, en general, no lleva a la respuesta correcta.

(b) Encontrar otro ejemplo que dé la respuesta correcta.

*38. A mediados del siglo XVII el matemático inglés John Wallis descubrió que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

Escribir una fórmula para la fracción n - ésima de este producto.

*39. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que ilustre un algoritmo para calcular π utilizando los 100 primeros factores de la fórmula del problema 38.

5.6. SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES RACIONALES

Antes de considerar la suma y resta de expresiones racionales, se revisarán estas operaciones con números racionales. Se encontrará el

mínimo común denominador (abreviado mcd) de dos o más fracciones a fin de sumarlas o restarlas.

Definición

El *mínimo común denominador* de dos o más fracciones es el menor número positivo que es divisible exactamente por cada uno de sus denominadores.

Para las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, el mcd es 12. Se tiene $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$. Sin embargo, cuando se trate de números más grandes, no es tan sencillo ver de inmediato cuál sería el mcd. Una vez más, la factorización será útil, y este procedimiento es el que se usará asimismo con expresiones racionales.

Considérese el problema $\frac{5}{6} + \frac{2}{15} + \frac{4}{35}$. Al factorizar los denominadores se obtiene $\frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7}$. El mcd debe contener al menos los factores 2 J 3 para que el 6 lo divida exactamente. Además debe contener, al menos, los factores $3 \cdot 5$ para que el 15 lo divida. Pero no es necesario considerar $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, ya que $2 \cdot 3 \cdot 5$ es divisible entre $2 \cdot 3$ y entre $3 \cdot 5$. Es decir, no es necesario repetir el factor 3, ya que está contenido en dos denominadores diferentes. Puede usarse un factor 3 para ambos. Por último, el mcd debe contener al menos los factores $5 \cdot 7$ para que el 35 lo divida. Se ha determinado ya que el mcd debe tener un factor 5; por tanto, sólo hace falta introducir el factor 7 del último denominador. El mcd sería entonces $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, o sea 210.

El siguiente paso es cambiar cada una de las fracciones por una fracción que tenga 210 como denominador. Se tiene:

$$\frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} = \frac{?}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{?}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \quad ?}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

Es conveniente trabajar con la forma factorizada, porque así pueden verse de inmediato los números que se necesitan como factores para cambiar la forma de cada fracción.

En la primera fracción se quiere cambiar el denominador de $2 \cdot 3$ a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Por lo tanto, se multiplican numerador y denominador por $5 \cdot 7$. Se tiene:

$$\frac{5}{2 \cdot 3} \frac{(5 \cdot 7)}{(5 \cdot 7)} = \frac{175}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

En la segunda fracción se quiere cambiar el denominador de $3 \cdot 5$ a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Por lo tanto, se multiplican numerador y denominador por $2 \cdot 7$. Se tiene:

$$\frac{2}{3 \cdot 5} \frac{(2 \cdot 7)}{(2 \cdot 7)} = \frac{28}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

En la tercera fracción se quiere cambiar el denominador de $5 \cdot 7$ a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Por lo tanto, se multiplican numerador y denominador por $2 \cdot 3$. Se tiene:

$$\frac{4}{5 \cdot 7} \frac{(2 \cdot 3)}{(2 \cdot 3)} = \frac{24}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

Así, $\frac{5}{6} + \frac{2}{15} + \frac{4}{35} = \frac{175}{210} + \frac{28}{210} + \frac{24}{210} = \frac{227}{210}$. Sólo hay una tarea por hacer: reducirla a su mínima expresión si es posible. Nuevamente, la forma factorizada es útil, porque sabe que si la fracción puede reducirse es porque uno o más de los factores 2, 3, 5 y 7 se cancelan. Sólo es necesario investigar si 227 es divisible entre alguno de estos factores. No lo es. Por consiguiente la respuesta es

$$\frac{227}{210} \text{ o } 1\frac{17}{210}.$$

El lector debe examinar el ejemplo siguiente a fin de verificarse que entiende los principios de la suma de números racionales antes de que se considere la adición de expresiones racionales.

Ejemplo 1

Sumar $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{9}$.

Solución

Se factorizan los denominadores: $\frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 3}$.

Se encuentra el mcd.

De la primera fracción: Se necesitan los factores $2 \cdot 2$ para el mcd.

De la segunda fracción: Sólo se necesita el 3, porque se tiene ya un 2 en el mcd. Es decir, el 3 es el único factor "nuevo".

De la tercera fracción: Se tiene ya un 3, pero el otro 3 es un factor "nuevo", de modo que se incorpora al mcd. Por tanto, el mcd es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Se cambian las fracciones de modo que todas tengan 36 como denominador.

$$\frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 3} = \frac{?}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{?}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{?}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{9 - 30 + 28}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{36}.$$

A continuación, se aplican los mismos principios a las expresiones racionales.

Para sumar o restar expresiones racionales:

1. Se factorizan los denominadores.
2. Se encuentra el mcd.
   a. Se utilizan todos los factores del denominador de la primera fracción.
   b. Se utilizan los factores nuevos de los denominadores restantes.
3. Se multiplican numerador y denominador de cada fracción por los factores del mcd que no estaban originalmente en su denominador.
4. Para obtener el resultado, el numerador es la suma (o diferencia) de los numeradores; el denominador es el mcd.
5. Se factoriza el numerador y se reduce la expresión racional, si es posible.

Ejemplo 2 Sumar $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$.

Solución

1. Los denominadores se componen ya de factores
2. El mcd tiene los factores b y c de la primera fracción; a de la segunda. El mcd es abc.
3. Se tiene $\frac{a\,a}{bc\,a} + \frac{b\,b}{ac\,b} + \frac{c\,c}{ab\,c}$.
4. Por tanto, la suma es $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$.
5. Debido a que el numerador es primo, la fracción no puede reducirse.

Ejemplo 3

Sumar $\frac{x+2}{x-3} + \frac{x+3}{x-2}$.

Solución

1. El denominador no puede factorizarse.
2. El mcd es $(x-3)(x-2)$.
3. Se tiene $\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)} + \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$.

o $\frac{x^2-4}{(x-3)(x-2)} + \frac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}$.

4. La suma es $\frac{2x^2-13}{(x-3)(x-2)}$.
5. Debido a que $2x^2 - 13$ es primo, la fracción no es reductible.

La respuesta es $\frac{2x^2-13}{x^2-5x+6}$.

Ejemplo 4

Restar $\frac{1}{x^2-9} - \frac{x}{x^2+6x+9}$.

Solución

1. Se factorizan los denominadores:

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{x}{(x+3)(x+3)}.$$

2. El mcd es $(x - 3)(x + 3)(x + 3)$
   del primero del segundo

3. Se tiene $\dfrac{1}{(x-3)(x+3)}\dfrac{(x+3)}{(x+3)} - \dfrac{x}{(x+3)(x+3)}\dfrac{(x-3)}{(x-3)}$

4. El resultado es $\dfrac{x + 3 - x^2 + 3x}{(x-3)(x+3)(x+3)} = \dfrac{-x^2 + 4x + 3}{(x-3)(x+3)(x+3)}$

5. El numerador es primo, por lo que la fracción no es reductible.

Ejemplo 5

Sumar $\dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{y^2+y}$.

Solución

1. Se factorizan los denominadores:

$$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y \cdot y} + \frac{1}{y(y+1)}.$$

2. El mcd es $(y + 1)(y)(y)$ o $y^2(y + 1)$.

3. Se tiene:

$$\frac{1}{(y+1)}\frac{(y^2)}{(y^2)} + \frac{1}{y \cdot y}\frac{(y+1)}{(y+1)} + \frac{1}{y(y+1)}\frac{(y)}{(y)}$$

$$= \frac{y^2}{y^2(y+1)} + \frac{(y+1)}{y^2(y+1)} + \frac{y}{y^2(y+1)}$$

4. La suma es $\dfrac{y^2 + y + 1 + y}{y^2(y+1)} = \dfrac{y^2 + 2y + 1}{y^2(y+1)}$.

5. Al factorizar el numerador y reducir: $\dfrac{(y+1)(y+1)}{y^2(y+1)} = \dfrac{(y+1)}{y^2}$.

Ejercicios

Efectuar la suma o resta, según se indique. Ver los ejemplos 2 al 5.

1. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$

2. $\dfrac{c}{d} + \dfrac{1}{c}$

3. $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p^2}$

4. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2x}{x-1}$

5. $\dfrac{y}{y^2-1} + \dfrac{1}{y^2-2y+1}$

6. $\dfrac{z}{z^2-3z+2} + \dfrac{3}{z^2-4z+3}$

7. $\dfrac{3}{2x^2-3x} - \dfrac{x}{4x^2-9}$

8. $\dfrac{7}{6a^2-7a-3} - \dfrac{2}{3a^2+a}$

9. $\dfrac{y-1}{y+1} + \dfrac{y+1}{y-1}$

10. $\dfrac{2z+3}{z-3} + \dfrac{2z-3}{z+3}$

11. $\dfrac{p}{2p^2-2p} - \dfrac{1}{2p^2+2p}$

12. $\dfrac{7}{x^2-6x+9} + \dfrac{x}{x^2-x-6}$

13. $\dfrac{5m}{m^2-4} + \dfrac{3}{m-2}$

14. $\dfrac{5}{t^2-25} - \dfrac{t}{t^2+10t+25}$

15. $\dfrac{2x}{9x^2+6x+1} - \dfrac{1}{3x+1}$

16. $\dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{y^2} - \dfrac{1}{2}$

17. $\dfrac{5}{z} - \dfrac{7}{z+1} + \dfrac{z}{z^2+z}$

18. $\dfrac{2}{m} + \dfrac{3}{2m+2} - \dfrac{m}{2m^2+2m}$

19. $\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{2}{a-1} + \dfrac{3a}{a^2-1}$

20. $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-2x-3}$

21. $\dfrac{5}{m-4} - \dfrac{m}{m+2} + \dfrac{3}{m^2-2m-8}$

22. $\dfrac{y+2}{2y-1} + \dfrac{y-2}{2y+1} - \dfrac{5}{4y^2-1}$

23. $\dfrac{3}{z} + \dfrac{2z}{2z-1} - \dfrac{5z-2}{2z^2-z}$

24. $\dfrac{x}{3x+2} + \dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{x+5}{6x^2-5x-6}$

*25. Simplificar: $\dfrac{x+y}{x-y}\left(\dfrac{y^{-1}-x^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}\right)$

*26. Considérese $1 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} + \ldots\right)$

(a) Encontrar una fórmula para el término n-ésimo del paréntesis.
(b) Encontrar el resultado (hasta el 4o. término del paréntesis) de sumar las fracciones usando el mínimo común denominador. Expresar la suma como un decimal redondeado a siete cifras.
(c) Expresar las fracciones (hasta el 4o. término del paréntesis) como decimales redondeados a siete cifras y sumarlos.

(d) ¿Cuál es la diferencia entre las respuestas de (a) y (b)?

*27. 159/46 puede expresarse como una "fracción continua" escribiendo 159/46 =

$$3 + 21/46 = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{46}{21}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{21}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{21}{4}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}}.$$

Expresar 149/68 como una fracción continua.

5.7 POLINOMIOS EN FORMA ANIDADA

En este capítulo se ha trabajado con polinomios. En Pascal no existe ningún símbolo de exponenciación. Incluso en lenguajes como el FORTRAN y el BASIC que sí tienen símbolos de exponenciación, los polinomios con frecuencia se escriben sin usarlos. En la sección 2.6 se vio ya que es una mejor práctica de programación escribir multiplicaciones repetidas que usar exponentes, porque los resultados son más precisos. Así, un polinomio como $3x^2 - 2x + 1$ podría escribirse como 3*X*X − 2* X + 1. A ésta se le llamará la forma *expandida*.

Sin embargo, las expresiones escritas de esta manera son tediosas. Un procedimiento más común es escribir el polinomio en forma *anidada*. Por ejemplo, considérese de nuevo $3x^2 - 2x + 1$. No hay ningún factor común, pero los dos primeros términos tienen a x como tal. Si sólo se factoriza la primera parte de la expresión se tiene $3x^2 - 2x + 1 = x(3x - 2) + 1$. (El lector debe entender que no puede decirse que el polinomio se haya factorizado.) Utilizando la notación de computadora, se escribe X* (X*3 − 2) + 1.

Considérese un problema un poco más largo. El polinomio $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ podría escribirse como $x[3x^2 - 2x + 1] - 1$.

Pero la expresión dentro del paréntesis cuadrado puede escribirse en la forma empleada en el párrafo anterior. Por tanto, se tiene $x[x(3x - 2) + 1] - 1$, o, utilizando la notación de computadora, X* (X* (X*3 − 2) + 1) − 1.

El procedimiento para escribir un polinomio en forma anidada puede generalizarse como un algoritmo.

Para escribir un polinomio con n términos en forma anidada:

1. Se saca el factor común de los $n - 1$ primeros términos.
2. Se ignora el último término del paréntesis, y se saca el factor común de los demás términos del paréntesis.
3. Se repite el paso 2 hasta que sólo haya dos términos en el paréntesis más interior.

Ejemplo 1

Escribir $x^2 + 2x - 4$ en forma anidada utilizando notación de computadora.

Solución

Se factoriza la primera parte: $x^2 + 2x - 4 = x(x + 2) - 4$. La expresión dentro del paréntesis sólo contiene dos términos. Por tanto, la forma anidada de $x^2 + 2x - 4$ es X*(X + 2) − 4.

Ejemplo 2

Escribir $2x^3 + x^2 - 3x + 4$ en forma anidada utilizando notación de computadora.

Solución

Se factoriza la primera parte: $2x^3 + x^2 - 3x + 4 = x[2x^2 + x - 3] + 4$. Se factoriza la primera parte de la expresión que está dentro de los paréntesis cuadrados: $x[x(2x + 1) - 3] + 4$. Puesto que la expresión entre los paréntesis curvos sólo tiene dos términos, el polinomio está en la forma anidada. Al escribirla en notación de computadora se tiene X*(X*(X*2 + 1) − 3) + 4.

Ejemplo 3

Escribir $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ en forma anidada utilizando notación de computadora.

Solución

Se factoriza la primera parte:

$x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = x\{x^3 + x^2 - x + 1\} - 1$. Se factoriza la primera parte de la expresión entre las llaves: $x\{x[x^2 + x - 1] + 1\} - 1$. Se factoriza la primera parte entre los paréntesis cuadrados: $x\{x[x(x + 1) - 1) - 1] + 1\} - 1$. Puesto que la expresión entre

los paréntesis curvos sólo tiene dos términos, el polinomio está en la forma anidada. Escribiéndola en notación de computadora, se tiene X*(X*(X*(X + 1) − 1) X 1) − 1.

La ventaja de escribir polinomios en la forma anidada es que hay menos multiplicaciones por efectuar. Cuando el número de operaciones en un problema de computación se usa como medida de eficiencia, por lo general sólo se toman en cuenta multiplicaciones y divisiones. Las sumas y restas se hacen con una rapidez mucho mayor que las multiplicaciones y divisiones, de modo que su efecto, por lo general, puede ignorarse cuando se comparan los dos procedimientos. Considérese el polinomio $3x^2 - 2x + 1$. Para simplificar la forma *expandida* 3*X*X − 2*X + 1 se requieren tres multiplicaciones, pero para simplificar la forma *anidada*, X*(X*3 − 2) + 1, sólo se requieren dos multiplicaciones. El uso de la forma anidada es más eficiente.

Ejemplo 4

Comparar el número de operaciones necesarias para evaluar $3x^4 - 2x^2 + x - 1$ en la forma expandida y en la anidada.

Solución

En la forma expandida 3*X*X*X*X − 2*X*X + X − 1 se necesitan seis multiplicaciones. En la forma anidada X* (X* (X* (X*3) − 2) + 1) − 1 se requieren sólo cuatro multiplicaciones.

No es necesario escribir la forma expandida de una expresión para contar las multiplicaciones necesarias. Por ejemplo, ya que x^3 se escribe como X*X*X, hay dos multiplicaciones. En general, un exponente n indica $n - 1$ multiplicaciones. Así, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ tiene tres multiplicaciones en el primer término (dos de x^3 y una del factor 3), y dos multiplicaciones en el segundo término (una de x^2 y una del factor −2). En el tercero y el cuarto términos no hay multiplicaciones. El polinomio requiere un total de cinco multiplicaciones. Cuando el polinomio se escribe en la forma anidada X* (X* (X*3 − 2) + 1) − 1, sin embargo, sólo se necesitan tres multiplicaciones. Es decir, el número de multiplicaciones es igual al número de multiplicaciones del primer término solo.

Para contar el número de multiplicaciones en un polinomio:

1. En la forma *expandida:* Se cuenta el número de multiplicaciones requeridas en *todos* los términos. Un exponente n indica $n - 1$ multiplicaciones.
2. En la forma *anidada:* Se cuenta el número de multiplicaciones requeridas en el *primer* término.

Ejemplo 5

Comparar el número de operaciones necesarias para evaluar $3x^4 - 2x^2 + 5$ en la forma expandida y en la anidada.

Solución

En la forma expandida se requieren cuatro multiplicaciones para el primer término (tres de x^4 y una del factor 3) y dos multiplicaciones para el segundo término (una de x^2 y una del factor -2), para un total de seis multiplicaciones. En la forma anidada sólo se requieren cuatro multiplicaciones (el mismo número que las del primer término solo).

Al escribir un número en base 2 en la forma anidada se puede ver por qué son válidos los algoritmos de la sección 4.2. Aun cuando sólo se considera un ejemplo, los argumentos pueden generalizarse para incluir cualquier entero de cualquier base. Considérese el número binario 101101. Se tiene

$$\begin{aligned}
101101_2 &= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \\
&= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \\
&= 2\{1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0\} + 1 \\
&= 2\{2[1 \cdot 2^3 + 0.2^2 + 1 \cdot 2 + 1] + 0\} + 1 \\
&= 2\{2[2(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1) + 1] + 0\} + 1 \\
&= 2\{2[2(2\{1 \cdot 2 + 0\} + 1) + 1] + 0\} + 1.
\end{aligned}$$

Los dígitos 101101 del número binario se indican en negritas. Si se realizan las operaciones aritméticas en el orden normal (los símbolos de agrupación primero, de adentro hacia afuera), se estarán siguiendo los pasos descritos en la regla para convertir de la base 2 a la base 10.

Además, si el número base 10 (escrito en la forma anidada) se divide entre dos, 2 no es factor de la expresión completa. Hay un residuo de 1. Si se "elimina" este residuo y se divide entre dos nuevamente, el residuo será 0. Si se continúa este proceso, la serie de residuos será los dígitos del número binario 101101. Es decir, se estarán siguiendo los pasos descritos en la regla para convertir de la base 10 a la base 2.

Como un ejemplo de conversión de una fracción decimal a una fracción binaria se considera el número binario 0.1111.

$$0.1111_2 = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{1}{16}\right)$$

Este número puede escribirse en forma anidada como

$$\frac{1}{2}\left\{1 + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{8}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1+1\left(\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(1+1\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right]\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot 1\right)\right]\right\}$$

La multiplicación de la fracción decimal por dos elimina la primera fracción de 1/2 y produce (como un número entero) el bit de la extrema izquierda de la fracción binaria. La multiplicación de la fracción que queda por dos elimina la segunda fracción de 1/2 y produce (como entero) el siguiente bit, y así sucesivamente. Puede aplicarse el mismo razonamiento para las bases 8 y 16.

Ejercicios

Escribir en forma anidada los siguientes polinomios, utilizando notación de computadora. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. $x^2 - 7x + 2$
2. $2x^2 + 5x - 3$
3. $4x^2 + 3x - 1$
4. $3x^2 - x + 2$
5. $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$
6. $2x^3 - 5x^2 + 7x - 1$
7. $8x^3 - 6x^2 + 4x - 3$
8. $2x^3 - 4x^2 + 1$
9. $x^3 - 2x^2 + 3$
10. $x^3 - x^2 + x - 1$
11. $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1$
12. $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 4$
13. $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 7x - 5$
14. $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
15. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

Comparar el número de multiplicaciones necesarias para evaluar los polinomios siguientes en la forma expandida y en la anidada. Ver los ejemplos 4 y 5.

16. $x^2 - 7x + 2$
17. $2x^2 + 5x - 3$
18. $4x^2 + 3x - 1$
19. $3x^2 - x + 2$
20. $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$
21. $2x^3 - 5x^2 + 7x - 1$
22. $8x^3 - 6x^2 + 4x - 3$
23. $2x^3 - 4x^2 + 1$
24. $x^3 - 2x^2 + 3$
25. $x^3 - x^2 + x - 1$
26. $x^4 + 3x^2 + 2x^2 - x - 1$
27. $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 4$
28. $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 7x - 5$
29. $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
30. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

*31. Escribir los siguientes números octales en la forma anidada y convertirlos a la base 10 para indicar cómo funciona el algoritmo de conversión.

a. 127_8.
b. 231_8.

*32. Utilizando la forma anidada del número 0.1111 en base 2, desarrollar un algoritmo para realizar la conversión de una fracción binaria a una fracción decimal.

Revisión de capítulo

Un exponente es un símbolo usado para indicar una _____ repetida.
En la expresión x^p, la base es _____ y el exponente es _____.

A las expresiones algebraicas que deben sumarse se les llama _____.

A las expresiones algebraicas que deben multiplicarse se les llama _____.

Un _____ de una variable es una expresión de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \in R$ y $n \in I$, $n \geqslant 0$.

El grado del polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ es _____, y a los valores $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ se les llama _____.

Un _____ es un polinomio con exactamente dos términos.

Un _____ es un polinomio con exactamente tres términos.

Una expresión _____ es el cociente indicado de dos polinomios tal que el denominador sea diferente de cero.

Un número _____ es un entero mayor que 1, tal que los únicos enteros positivos que lo dividen exactamente son 1 y el propio número.

El mcd o _____ _____ _____ de dos números racionales o más es el menor entero positivo que es divisible exactamente por cada uno de los denominadores.

Prueba de capítulo

Simplificar las expresiones siguientes. En la respuesta final no deben aparecer exponentes cero o negativos.

1. $5x^3y(7xy^2)$
2. $5a^{-3}b(7ab^{-2})$
3. $4z^2(4z^{-2})$
4. $\dfrac{36m^2n}{4m}$
5. $\dfrac{5x^3y^{-1}}{3^{-2}w^2}$
6. $(2ab^2)^3$

7. $3(a^3 b^{-2})^2$ 8. $\left(\frac{2x}{3}\right)^3$ 9. $\left(\frac{2z^{-1}}{3}\right)^{-2}$

10. $(125)^{2/3}$

Efectuar las operaciones indicadas:

11. $(3x^2 + 4x - 1) + (2x^2 - 3x + 4)$
12. $(2y^2 - 3y + 1) - (y^2 + y - 3)$
13. $(3m + 1)(2m - 3)$
14. $(2p - 1)(4p^2 + 2p - 1)$
15. $(z - 2)(z - 3) + 5$

Factorizar, de ser posible, las expresiones siguientes:

16. $5x^2 - 10x$ 17. $z^2 - z - 12$ 18. $a^2 + 11a + 28$
19. $6x^2 + 7x - 3$ 20. $9y^3 - y$

Reducir a su mínima expresión las fracciones:

21. $\frac{70}{105}$ 22. $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}$

Efectuar las operaciones indicadas:

23. $\frac{26}{35} \cdot \frac{14}{39}$ 24. $\frac{m^2 - 5m + 6}{m^2 - 4} \cdot \frac{m^2 + 3m + 2}{m^2 - 9}$

25. $\frac{2p - 5}{p + 3} \div \frac{2p^2 - 11p + 15}{p^2 + 4p + 3}$ 26. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x^2}$

27. $\frac{a}{a + 2} + \frac{2a}{a - 2}$ 28. $\frac{z}{2z + 3} - \frac{1}{2z^2 + z - 3}$

29. $\frac{p}{p^2 - 3p} + \frac{1}{p + 2}$ 30. $\frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} - \frac{1}{3}$

Escribir los polinomios siguientes en la forma anidada, utilizando notación de computadora.

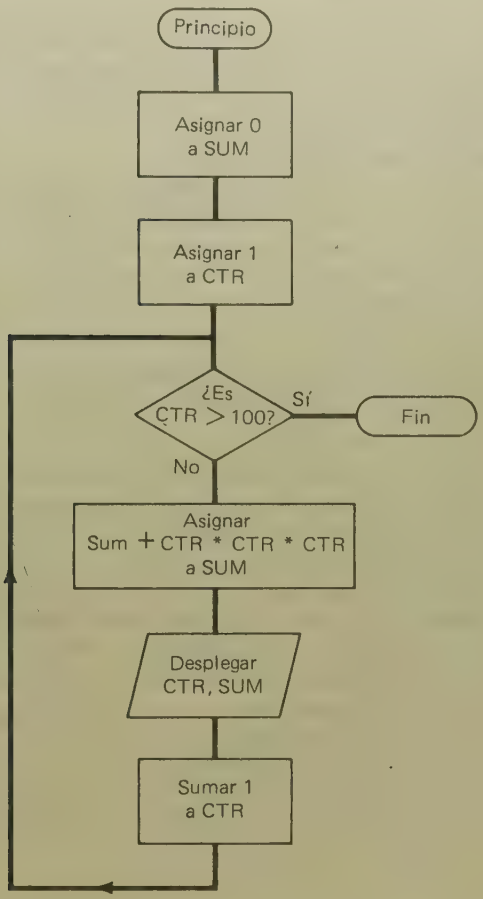
31. $3x^2 + 2x - 1$ 32. $3x^3 - 2x^2 + 5x - 4$
33. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

Comparar el número de multiplicaciones necesarias para evaluar los polinomios siguientes en la forma expandida y en la anidada.

34. $3x^4 - 2x^2 + 1$ 35. $2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$

⇒36. El diagrama de flujo de la figura siguiente muestra un algoritmo para calcular $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ para valores de n de 1 a 100. Modificarlo para que la suma aparezca sólo si

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$. Quizás el lector se sorprenda al saber que estas dos expresiones son iguales para cualquier número completo n.



BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Autrey, Melanie Ann y Joe Dan Austin. "A Novel Way to Factor Quadratic Polynomials," *The Mathematics Teacher*, Vol. 72 No. 2 (Febrero de 1979), 127-128. (Se proporciona un algoritmo para descomponer trinomios.)

Crombie, A. C. "Descartes, " *Scientific American,* Vol. 201 No. 4 (Octubre de 1959), 160-173.

Harris, Whitney, Jr. "Right Answer–Wrong Method," *Mathematics and Computer Education,* Vol. 19 No. 1 (Invierno de 1985), 49-51 (Programa en BASIC para encontrar fracciones en las que puede cancelarse un dígito.)

Kalman, Dan y Warren Page. "Nested Polynomials and Efficient Exponentiation Algorithms for Calculators," *The College Mathematics Journal*, Vol. 16 No. 1 (Enero de 1985), 57-60.

Biografía — René Descartes

René Descartes nació el 31 de marzo de 1596 en Francia. Su madre murió pocos meses después del parto. Su padre fue un abogado cuyos hijos se esperaba siguieran carreras en el ejército o la Iglesia, como lo hacían la mayoría de los nobles de la época.

Cuando tenía aproximadamente ocho años de edad, René fue enviado a una escuela jesuita. Por ser un niño enfermizo, el rector lo autorizó a levantarse a la hora que mejor le pareciera. Mucho después de haber recuperado la salud, Descartes acostumbraba meditar en la cama por las mañanas.

Más tarde estudió derecho y matemáticas. A los 22 años de edad se enroló en el ejército holandés como oficial sin paga. Cuenta una leyenda que mientras caminaba por una calle en Holanda vio un cartel escrito en flamenco. Pidió a un transeúnte que se lo tradujera. El cartel contenía un reto para resolver un difícil problema matemático, lo que hizo en unas cuantas horas.

Descartes dejó el ejército holandés, viajó y se unió al ejército bávaro. La noche del 10 de noviembre de 1619 tuvo tres sueños consecutivos, lo que interpretó como un signo de que debía dudar sistemáticamente de todo y construir deductivamente una ciencia universal. Se cree que por esa época empezó a desarrollar su geometría analítica.

Continuó estudiando matemáticas en su tiempo libre. La notación utilizando enteros positivos como exponentes es una de sus aportaciones. Se estableció en Holanda en 1628. Dedicó 20 años al estudio y a escribir, interrumpidos solamente por la aflicción derivada de la muerte de su hija ilegítima de cinco años de edad.

En 1649 aceptó no de muy buen grado la invitación de la reina Cristina para radicar en Suecia. La reina decidió tomar sus clases de filosofía a las cinco de la mañana diariamente. Era uno de los inviernos más crudos de Suecia, y Descartes murió de pulmonía el 11 de febrero de 1650.

6

Ecuaciones

Una ecuación se resuelve eliminando los números que ocultan el valor de la variable, en forma parecida a la que emplea un niño al quitar la envoltura que oculta el contenido de un paquete.

6.1. ECUACIONES Y DESIGUALDADES LINEALES

La palabra *álgebra* se deriva del nombre de un libro escrito alrededor del año 825 por Mohammed ibn musa al-Khowarizmi. El libro se llamaba *Hisab al-jabr w'al Muqabalah*. El título se refiere a la ciencia de la solución de ecuaciones. Aun cuando la palabra *álgebra* se refiere en la actualidad a un campo del conocimiento más amplio, la solución de ecuaciones es un tema importante del álgebra elemental.

Resolver una ecuación significa encontrar los valores que, al sustituirlos en lugar de las variables, hacen que la ecuación sea una proposición verdadera. En esta sección se resolverán ecuaciones lineales con una variable. En una ecuación lineal el mayor exponente de la variable es 1 y no hay exponentes fraccionarios ni negativos.

Definición

Una ecuación lineal con la variable x es aquella que puede escribirse en la forma $ax + b = 0$, donde a y $b \in R$, $a \neq 0$.

Se dice que el valor de la variable que hace verdadera la ecuación, la satisface, y se le llama la *solución* de la ecuación. Si dos ecuaciones tienen la misma solución, se dice que son *equivalentes*.

Primero se tratarán algunas ideas importantes para resolver una ecuación. Las operaciones inversas son dos operaciones tales que una

de ellas "rehace" a la otra, como sucede con la adición y la sustracción. Supóngase que se empieza con 2. Si primero se le suma 3 y después se le resta 3, se tiene $2 + 3 = 5$ y $5 - 3 = 2$. La sustracción "rehace" a la adición y se tiene 2 nuevamente. La multiplicación y la división también son operaciones inversas.

Existe una analogía entre desenvolver un paquete y resolver una ecuación. Para desenvolver un paquete primero se quita la cinta, después el papel y finalmente la caja. Es decir, el paquete se desenvuelve en el orden *contrario* al que se siguió para envolverlo. Obsérvese también que atar y desatar la cinta, envolver y desenvolver el papel, y cerrar y abrir la caja son ejemplos de operaciones inversas. De igual manera, una ecuación se configura utilizando sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, siguiendo el orden general de las operaciones. Para "separarla" se deshace en el orden opuesto, utilizando las operaciones inversas.

Por último, si se suma o se resta el mismo número a los dos miembros de una ecuación, o si éstos se multiplican o dividen entre el mismo número diferente de cero, se obtiene una ecuación equivalente. Es decir, la solución de la nueva ecuación será la misma que la de la ecuación original.

Para resolver una ecuación lineal se siguen tres pasos:

1. Se simplifican ambos miembros.
2. Se eliminan los términos sobrantes.
3. Se eliminan los factores y divisores sobrantes.

A continuación, se examinan estos tres pasos con mayor detalle.

1. Se simplifican ambos miembros. Se aplica la propiedad distributiva, de ser necesario, y se reducen términos semejantes. Por ejemplo, $2(x + 3) - 5 = 6$ debe volver a escribirse como:

$$\begin{aligned} 2x + 6 - 5 &= 6 \\ 2x + 1 \quad &= 6. \end{aligned}$$

2. Se eliminan los términos sobrantes. Se quiere dejar sola la x en uno de los miembros de la ecuación. En el ejemplo anterior, el "1" es un término que no se quiere. Puesto que el "1" está sumado a $2x$, la adición puede cancelarse con una sustracción. Restando 1 a ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} 2x + 1 - 1 &= 6 - 1 \text{ o} \\ 2x \quad &= 5. \end{aligned}$$

3. Se eliminan los factores o divisores sobrantes. Se quiere la x sola, no $2x$. Es necesario eliminar el factor 2. Puesto que la

multiplicación puede "deshacerse" con la división, se dividen ambos miembros de la ecuación entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \text{ o } x = 2\frac{1}{2}.$$

Para resolver una ecuación lineal con una variable:

1. Se simplifican ambos miembros.
   a. Se aplica la propiedad distributiva, de ser necesario.
   b. Se reducen los términos semejantes.
2. Utilizando operaciones inversas, se eliminan los términos sobrantes (por ejemplo, se suma o se resta el mismo número en ambos miembros de la ecuación).
3. Utilizando operaciones inversas, se eliminan los factores o divisores sobrantes (por ejemplo, se multiplican o dividen los miembros de la ecuación entre el mismo número diferente de cero).

Ejemplo 1

Resolver $\frac{x}{3} - 1 = 4$.

Solución

1. Ninguno de los miembros puede simplificarse.
2. Quiere eliminarse el 1. Puesto que el 1 se restó, se suma 1 a ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{x}{3} - 1 + 1 = 4 + 1 \text{ o}$$

$$\frac{x}{3} = 5.$$

3. Quiere eliminarse el 3. Puesto que el 3 divide a x, ambos miembros de la ecuación se multiplican por 3:

$$(3)\frac{x}{3} = (3)\,5 \text{ o}$$

$$x = 15.$$

Resolver $2y - 1 = 3y + 2$.

Ejemplo 2

Solución

1. Ninguno de los miembros puede simplificarse.
2. La respuesta final sólo debe tener un término y. Por lo tanto, se empieza por eliminar el término y sobrante. Para eliminar $2y$, tendría que restarse $2y$ en ambos miembros. (La ecuación también podría resolverse si se resta $3y$ en ambos miembros.) Se tiene $2y - 1 - 2y = 3y + 2 - 2y$ o
$$-1 = y + 2.$$

Se elimina ahora el 2 y se resta este número en ambos miembros.

$$-1 - 2 = y + 2 - 2 \text{ o } -3 = y.$$

Resolver $2z - (z + 1) = 3(z - 1) + 4$.

Ejemplo 3

Solución

1. Se simplifican ambos miembros:
$$\begin{aligned} 2z - (z + 1) &= 3(z - 1) + 4 \\ 2z - z - 1 &= 3z - 3 + 4 \\ z - 1 &= 3z + 1. \end{aligned}$$

2. Se eliminan los términos sobrantes:
$$\begin{aligned} z - 1 - z &= 3z + 1 - z \\ -1 &= 2z + 1 \\ -1 - 1 &= 2z + 1 - 1 \\ -2 &= 2z. \end{aligned}$$

3. Se eliminan los factores o divisores sobrantes:
$$\begin{aligned} -2/2 &= 2z/2 \\ -1 &= z. \end{aligned}$$

Resolver $5x - 1 = x - 2(x + 1)$.

Ejemplo 4

Solución

$$\begin{aligned} 5x - 1 &= x - 2(x + 1) \\ 5x - 1 &= x - 2x - 2 \\ 5x - 1 &= -x - 2 \\ 5x - 1 + x &= -x - 2 + x \\ 6x - 1 &= -2 \\ 6x - 1 + 1 &= -2 + 1 \\ 6x &= -1 \\ 6x/6 &= -1/6 \text{ o } x = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Al enunciado que indica que dos cantidades son diferentes se le llama *desigualdad*.

Símbolos de desigualdad

$\neq$ significa *es diferente que*
$>$ significa *es mayor que*
$<$ significa *es menor que*
$\geqslant$ significa *es mayor o igual que*
$\leqslant$ significa *es menor o igual que*

Siempre que se comparan dos números, el símbolo de desigualdad apunta hacia el número menor. Así, puede decirse $2 < 3$ o $3 > 2$. Ambas desigualdades expresan la misma relación entre 2 y 3. Resolver una desigualdad lineal es casi lo mismo que resolver una ecuación lineal. Sólo existe una regla adicional: al multiplicar o dividir miembros de una desigualdad entre un número negativo, es necesario invertir la dirección del símbolo de desigualdad.

Para resolver una desigualdad lineal con una variable:

1. Se simplifican ambos miembros.
   a. Se aplica la propiedad distributiva, de ser necesario.
   b. Se reducen los términos semejantes.
2. Utilizando operaciones inversas. Los términos sobrantes se eliminan (por ejemplo, se suma o se resta el mismo número en ambos miembros de la desigualdad).
3. Utilizando operaciones inversas, se eliminan los factores o divisores sobrantes (por ejemplo, se multiplican o dividen por el mismo número diferente de cero, ambos miembros de la desigualdad).
4. Si se multiplican o dividen ambos miembros entre un número *negativo*, se invierte la dirección del símbolo de desigualdad.

Ejemplo 5

Resolver $3m + 1 \geqslant 2$.

Solución

$$\begin{aligned} 3m + 1 - 1 &\geqslant 2 - 1 \\ 3m &\geqslant 1 \\ 3m/3 &\geqslant 1/3 \\ m &\geqslant \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

No se multiplicó ni dividió entre un número *negativo*, por lo que la desigualdad siguió "apuntando" en la misma dirección en todo el problema.

Ejemplo 6

Resolver $-3p + 1 < 2$.

Solución

$$\begin{aligned} -3p + 1 - 1 &< 2 - 1 \\ -3p &< 1 \\ -3p/(-3) &> 1/(-3) \\ p &> -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La división entre -3 cambió el símbolo $<$ por $>$.

Ejemplo 7

Resolver $-4x + 3 > 2x + 1$.

Solución

$$\begin{aligned} -4x + 3 - 2x &> 2x + 1 - 2x \\ -6x + 3 &> 1 \\ -6x + 3 - 3 &> 1 - 3 \\ -6x &> -2 \\ -6x/(-6) &< -2/(-6) \\ x &< \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicios

Resolver las ecuaciones siguientes. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. $5x + 3 = 7$
2. $4y + 7 = 2$
3. $6z + 1 = -3$
4. $2x + 4 = -7$
5. $\frac{x}{5} + 2 = 7$
6. $\frac{3y}{2} - 1 = 3$
7. $\frac{m}{3} - 2 = 1$
8. $\frac{p}{4} + 3 = -1$
9. $\frac{2x}{3} + 1 = 4$
10. $3m + 2 = 5m - 1$
11. $2p - 6 = 7p + 8$
12. $5x + 1 = 1 - x$
13. $4x + 3 = 2 - 5x$
14. $n - 2 = 4n + 1$

15. $3(x + 1) = 2x + 3$
16. $4(y - 2) = y - 1$
17. $5(1 - p) = 3p - 2$
18. $-1(2 - x) = 5x + 4$
19. $2(m + 1) = 3m - 7$
20. $3(z - 4) + 2 = z$
21. $-(x - 2) + 2x = 0$
22. $2(n - 1) + 4 = 3n + 2(n - 1)$
23. $-3(x + 2) - 1 = 2x - 4(x + 3)$
24. $-1(y - 3) - 4 = 7y - (y - 7)$
25. $2(2z + 3) - 5 = 2z - (3z - 11)$

Resolver las desigualdades siguientes. Ver los ejemplos 5 al 7.

26. $3x - 5 > 7$
27. $2y - 4 \leqslant 3$
28. $z - 6 \geqslant 3$
29. $4x - 7 < 2$
30. $\frac{m}{2} - 5 < 2$
31. $\frac{2p}{3} - 3 > 1$
32. $3x - 1 \geqslant x + 5$
33. $2y + 8 \leqslant 7y + 6$
34. $2(z + 3) \leqslant 3z - 1$
35. $m + 2 > 4(m + 1)$
36. $3(1 - x) < 5x + 2$

Reemplazar cada letra por un dígito:

***37.** DOS + DOS = CUATRO
***38.** CUATRO + UNO = CINCO
***39.** Resolver para x: $8^{(x-1)} = 4^{-(x-1)}$
***40.** Resolver para x: $2(3(4(5(x - 1) + 6) - 5) + 4) - 2 = 0$

6.2. FÓRMULAS

Una fórmula es una expresión que relaciona dos variables o más mediante una ecuación. Por lo general, una de las variables aparece sola y las restantes están en el otro miembro de la ecuación. Se dice que una fórmula *está resuelta* para la variable que aparece sola en uno de los miembros de la ecuación. Por ejemplo, $E = mc^2$ es una fórmula que relaciona las variables E, m y c. Se dice que está resuelta para E. En ocasiones, es necesario volver a escribir una fórmula para que esté resuelta para una variable *diferente*. Podría escribirse $m = E/c^2$ y la fórmula estaría resuelta para m.

Resolver una fórmula es como resolver una ecuación con una variable, si se tiene una idea clara de cuál es la variable que se quiere aislar. Para dejar sola la variable deseada en uno de los miembros de la ecuación, se simplifican ambos miembros de la ecuación, se eliminan los términos sobrantes y después se eliminan los factores o divisores sobrantes.

Ejemplo 1

Resolver para v_0: $v = v_0 + at$.

Solución

1. Ambos miembros están en su forma más simple.
2. Puesto que se está despejado v_0, se quiere eliminar el término at restándolo a ambos miembros de la ecuación.

$$v - at = v_0 + at - at$$
$$v - at = v_0.$$

Ejemplo 2

Resolver para t: $v = v_0 + at$.

Solución

1. Ambos miembros están en su forma más simple.
2. Puesto que se está despejando t, se resta v_0 a ambos miembros, dejando sólo los términos que contienen t.

$$v - v_0 = v_0 + at - v_0$$
$$v - v_0 = at$$

3. Puesto que se está despejando t, se elimina el factor a dividiendo ambos miembros de la ecuación entre a.

$$\frac{v - v_0}{a} = \frac{at}{a}$$
$$\frac{v - v_0}{a} = t.$$

Ejemplo 3

Resolver para k: $Fr^2 = kQ_1Q_2$.

Solución

1. Ambos miembros están en su forma más simple.
2. No hay términos sobrantes.
3. Se eliminan los factores sobrantes Q_1 y Q_2 al dividir ambos miembros de la ecuación entre Q_1Q_2.

$$\frac{Fr^2}{Q_1Q_2} = \frac{kQ_1Q_2}{Q_1Q_2}$$
$$\frac{Fr^2}{Q_1Q_2} = k.$$

Al resolver fórmulas surgen dos problemas. Primero, puede ser difícil trabajar con fracciones. Sin embargo, los denominadores se cancelarán si se multiplican los dos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador (mcd) de las fracciones presentes en el problema. Segunda, aun cuando la misma variable puede aparecer varias veces, puede no hacerlo en términos semejantes, por lo que los términos no podrán reducirse. Sin embargo, la expresión puede factorizarse para que la variable aparezca sólo una vez.

Para resolver una fórmula para una variable particular:

1. Si la fórmula contiene denominadores, se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador.
2. Se simplifican ambos miembros.
3. Se eliminan los términos sobrantes utilizando operaciones inversas. (Se suma o se resta la misma expresión en los dos miembros de la ecuación.)
4. Si la variable que se está despejando aparece más de una vez, se factoriza sacándola como factor común.
5. Se eliminan los factores o divisores sobrantes utilizando operaciones inversas. (Se multiplican o se dividen entre el mismo factor diferente de cero ambos miembros de la ecuación. El lector puede suponer en este capítulo que los denominadores son diferentes de cero.)

Ejemplo 4

Resolver para R: $\dfrac{1}{o} + \dfrac{1}{i} = \dfrac{2}{R}$.

Solución

1. Se multiplican ambos miembros por oiR, el mcd de las tres fracciones:

$$oiR\left(\frac{1}{o} + \frac{1}{i}\right) = oiR\left(\frac{2}{R}\right)$$
$$iR + oR = 2oi.$$

2. En ninguno de los miembros hay términos semejantes, por lo que no pueden simplificarse.
3. Los dos términos del primer miembro contienen la variable R, que es la que va a aislarse, de modo que no hay términos sobrantes.

4. Puesto que la variable R aparece dos veces en el primer miembro, se saca como factor común: $R(i + o) = 2oi$.
5. Puesto que se está despejando R, se quiere eliminar el factor $(i + o)$:

$$\frac{R(i + o)}{(i + o)} = \frac{2oi}{(i + o)}$$

$$R = \frac{2oi}{i + o}.$$

Ejemplo 5

Resolver para a: $S = \frac{n}{2}(a + l)$.

Solución

1. Se multiplican ambos miembros por 2, el mínimo común denominador.

$$2(S) = 2\left[\frac{n}{2}(a + l)\right]$$

$$2S = n(a + l)$$

2. Se simplifican ambos miembros: $2S = na + nl$.
3. Se elimina el término nl: $2S - nl = na + nl - nl$
$$2S - nl = na.$$

4. La variable a aparece una sola vez.
5. Se elimina el factor n: $\frac{2S - nl}{n} = \frac{na}{n}$

$$\frac{2S - nl}{n} = a.$$

Ejercicios

Resolver las fórmulas siguientes para la variable que se indica. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. $F = ma$ para m
2. $F = ma$ para a
3. $\omega = nmgh$ para g
4. $\omega = nmgh$ para m

5. $P = 2L + 2W$ para L
6. $P = 2L + 2W$ para W
7. $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ para a
8. $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ para x
9. $E = F/q$ para F
10. $D = M/V$ para M
11. $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ para V
12. $A = \dfrac{\pi r^2 h}{2}$ para h
13. $F = \dfrac{GM_1M_2}{r^2}$ para G
14. $F = \dfrac{GM_1M_2}{r^2}$ para M_1

Resolver las fórmulas siguientes para la variable que se indica. Ver los ejemplos 4 y 5.

15. $E = \dfrac{F}{q}$ para q
16. $D = \dfrac{M}{V}$ para V
17. $x = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$ para x_0
18. $x = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$ para v_0
19. $v = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ para t_2
20. $v = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ para s_2
21. $M = \dfrac{Itm}{ze}$ para e
22. $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{E}$ para E
23. $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{E}$ para s
24. $v^2 = k^2m\left(\dfrac{2}{r} + \dfrac{1}{a}\right)$ para a
25. $v^2 = k^2m\left(\dfrac{2}{r} + \dfrac{1}{a}\right)$ para r
26. $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{o} + \dfrac{1}{i}$ para f
27. $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{o} + \dfrac{1}{i}$ para i
28. $\dfrac{p^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{k^2(m_1 + m_2)}$ para m_1
29. $\dfrac{p^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{k^2(m_1 + m_2)}$ para m_2
30. $\dfrac{p^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{k^2(m_1 + m_2)}$ para k^2

*31. La ley de Bode proporciona una fórmula conveniente para hacer cálculos aproximados de las distancias en unidades astronómicas (1 u.a. equivalente a unos 150 000 000 km) de los planetas al Sol. Para Mercurio, la distancia es de 4/10. En adelante, la distancia (d) del planeta n está dada por $d = (3 \cdot 2^{n-2} + 4)/10$. Los planetas, en orden, son Mercurio, Venus, Tierra, Marte, los asteroides, Júpiter, Saturno y Urano. (La ley de Bode no funciona para Neptuno y Plutón.)

(a) Usar la ley de Bode para calcular la distancia aproximada del Sol a Saturno.
(b) Usar la ley de Bode para calcular la distancia aproximada del Sol a Marte.
(c) ¿Cuánto más cerca están los asteroides de Marte que de Júpiter?

⇒32. La fórmula del ejemplo 5 da la suma S de la serie de n números que se obtiene al tomar a como primer número y sumar d para obtener cada número sucesivo. El último número es l. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que indique un algoritmo para sumar los números del 1 al 100:

(a) Utilizando esta fórmula.
(b) Utilizando un acumulador.
(c) ¿Cuál de los dos algoritmos se ejecutará más rápido en una computadora?

*33. A una figura plana cerrada con lados rectos se le llama *polígono*. Al segmento de recta que une dos vértices (esquinas) no adyacentes se le llama *diagonal*. Encontrar una fórmula para obtener el número de diagonales diferentes que pueden trazarse en un polígono de n lados.

*34. A un cuerpo que está limitado por superficies planas se le llama *poliedro*. Se dice que es convexo si cualquier segmento de recta que una dos de sus puntos contiene sólo puntos interiores del poliedro. Con la información de la tabla siguiente, determinar una fórmula para relacionar el número de caras (F), vértices (V) y bordes (E) de un poliedro convexo.

Poliedro	*Número de caras*	*Número de vértices*	*Número de aristas*
Tetraedro	4	4	6
Octaedro	8	6	12
Icosaedro	20	12	30
Hexaedro	6	8	12
Dodecaedro	12	20	30

6.3. PROBLEMAS EN LENGUAJE COMÚN

En la solución de problemas verbales no hay reglas sin excepción. Cada problema puede ser diferente del anterior. Sin embargo, existen algunas pautas generales que pueden ser de utilidad en un principio.

1. *Leer el problema rápidamente*. En esta lectura no se presta atención a los datos numéricos del problema. Si éste dice: "El cajero de un banco tiene $250 en billetes de diez y de veinte", el lector deberá entenderlo como: "El cajero de un banco tiene *cierta cantidad* en billetes de diez y de veinte". Es necesario captar la situación general, así como detectar las palabras clave como "suma" o "producto", las cuales indican la intervención de la adición o la multiplicación.

2. *Buscar la pregunta*. Hacer que la variable represente la cantidad que se quiere encontrar. No siempre es el mejor curso de acción, pero, por lo general, lo es. Si se pregunta: "¿Cuánto tiempo se necesitó?", escribir: "Sea t = tiempo". Si la pregunta es: "¿Qué tanto recorrió?", escribir: "Sea d = distancia recorrida". Si en el problema se pide encontrar más de un dato, escribir una expresión para representar cada cantidad.

3. *Escribir y marcar la información importante*. En este punto es necesario leer nuevamente el problema con mayor atención. Esto ayuda a tener todas las partes y piezas del problema juntas, escritas en forma concisa. Si el problema menciona el perímetro de un rectángulo, se anotaría toda la información disponible sobre el largo y el ancho porque el cálculo del perímetro se basa en estas medidas. Quizás fuera conveniente trazar una figura o escribir una fórmula que pareciera pertinente.

4. *Escribir una ecuación*. Uno de los errores más frecuentes al resolver problemas es intentar el paso 4 antes de haber realizado el 1. Es natural pensar que el primer paso al resolver un problema expresado en lenguaje común es escribir una ecuación. El lector debe evitar caer en esta trampa. Si uno dedica tiempo para realizar los pasos 1, 2 y 3, el paso 4 (escribir la ecuación) no es difícil. Este paso quizá implicara volver a leer el problema.

5. *Resolver la ecuación*. Este paso es el más sencillo.

6. *Verificar la solución*. En todos los casos es importante comprobar la solución en el problema original. Si, por ejemplo, se escribe una ecuación incorrecta, ésta puede resolverse correctamente, pero la solución no será adecuada para el problema en lenguaje común. La verificación de la ecuación (en lugar del problema original) no indicaría que se ha cometido un error. Debe leerse nuevamente el problema y sustituir la solución que se encontró para verificar si satisface las condiciones descritas.

Estos pasos se resumen en seguida:

Para resolver problemas en lenguaje común:

1. Leer el problema para entenderlo.
2. Identificar la variable. Por lo general será la cantidad que se quiere encontrar.
3. Anotar la información importante sobre todas las cantidades que intervienen en el problema. Trazar una figura o escribir una fórmula.
4. Anotar la ecuación. (Puede requerirse una nueva lectura del problema para ver cómo se relacionan las diferentes cantidades.)
5. Resolver la ecuación.
6. Verificar la solución sustituyéndola en el problema *original*.

Ejemplo 1

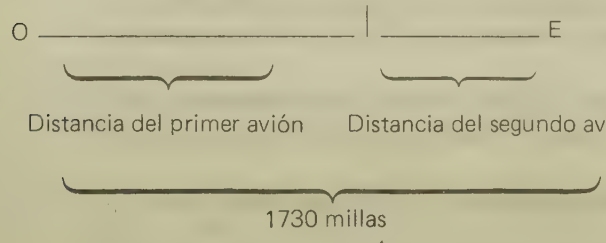
Un avión despega del aeropuerto hacia el oeste a 300 km/h. Una hora después, otro avión sale del mismo aeropuerto hacia el este a una velocidad de 350 km/h. ¿Cuánto tiempo debe volar cada uno antes de que estén separados 1 730 km?

Solución

1. Visualizar la escena. No se preste atención a los números todavía. Un avión despega. Después, otro avión despega en la dirección opuesta. Va más rápido que el primer avión.
2. Identificar las variables. La pregunta es: ¿Cuánto tiempo debe volar *cada uno*?; por lo que se hace que la variable represente el tiempo de vuelo de uno de los aviones. Se escribe: "Sea t = tiempo del primer avión". Pero también debe especificarse el tiempo de vuelo del segundo avión, ya que también se pide encontrar ese tiempo. Puesto que despegó una hora después, su tiempo de vuelo es una hora *menos*. Se escribe: "$t - 1$ =tiempo del segundo avión".
3. Se anota cualquier otra información importante. Al leerse nuevamente el problema, se ve que se indican las velocidades de los dos aviones. Se anota: 300 = velocidad del primero y 350 = velocidad del segundo. Se sabe que la distancia entre los dos aviones es de 1 730 kilómetros.
   Resumiendo esta información se tiene:

   Sea t = tiempo del primer avión
   $t - 1$ = tiempo del segundo avión
   300 km/h = velocidad del primer avión
   350 km/h = velocidad del segundo avión
   1 730 km = distancia entre los aviones

Podría usarse la fórmula $D = VT$.
También podría ser útil un diagrama de las rutas de los aviones.



4. Ahora puede escribirse la ecuación. Al revisar la información que se ha resumido en el paso 3, puede verse cómo usar la fórmula $D = VT$ para encontrar cada distancia de cada avión. La distancia del primer avión sería su velocidad multiplicada por su tiempo o $300t$. La distancia del segundo avión sería su velocidad multiplicada por su tiempo o $350(t - 1)$. El diagrama indica que la distancia 1 730 se obtiene al sumar las dos distancias individuales, por lo que $300t + 350(t - 1) = 1\,730$.
5. Se resuelve:

$$\begin{aligned} 300t + 350t - 350 &= 1730 \\ 650t - 350 &= 1730 \\ 650t - 350 + 350 &= 1730 + 350 \\ 650t &= 2080 \\ \frac{650t}{650} &= \frac{2080}{650} \\ t &= 3.2 \end{aligned}$$

Puesto que t era el tiempo del primer avión y $t - 1$ el del segundo, se tiene 3.2 horas (o 3 horas y 12 minutos) para el primero, y 2.2 horas (o 2 horas y 12 minutos) para el segundo.
6. Verificación. En el problema original se lee: "Un avión despega del aeropuerto hacia el oeste a 300 km/h. Una hora después, otro avión despega del mismo aeropuerto hacia el este a una velocidad de 350 km/h. Cuando el segundo avión ha recorrido 2.2 horas, la distancia entre los dos aviones es de 1 730 kilómetros".

Ejemplo 2

Una compañía química tiene 220 litros de una solución diluida a una concentración del 40 por ciento, la cual necesita aumentarse. ¿Qué cantidad de la sustancia química debe agregarse para que la concentración de la solución llegue al 45 por ciento?

Solución

1. Intentar visualizar un tanque de esta solución. Parte de la solución es la sustancia química; parte es un agente de dilución. El técnico necesita verter cierta cantidad extra de la sustancia química en ella.
2. Puesto que la pregunta es: ¿Qué cantidad de la sustancia química deberá agregarse?, sea g = cantidad de la sustancia química por agregarse.
3. Se anota otra información pertinente. Resumiendo, se tiene:

   Sea g = cantidad de sustancia química (100 por ciento de sustancia química)
   220 = cantidad de solución (40 por ciento de sustancia química)
   $g + 220$ = cantidad total de la mezcla (45 por ciento de sustancia química)

4. La cantidad de sustancia química es la misma si está en dos recipientes (como estaba al principio del problema) que cuando está mezclada. Considérese la cantidad de la sustancia química: 100 por ciento de g es sustancia química; 40 por ciento de 220 litros es sustancia química; y 45 por ciento de $g + 220$ litros es sustancia química.

   Por lo tanto se tiene:

$$
\begin{aligned}
g + .40(220) &= .45(g + 220) \\
g + 88 &= .45g + 99 \\
g + 88 - .45g &= .45g + 99 - .45g \\
.55g + 88 &= 99 \\
.55g + 88 - 88 &= 99 - 88 \\
.55g &= 11 \\
.55g/.55 &= 11/.55 \\
g &= 20 \text{ litros}
\end{aligned}
$$

6. Verificación: Una compañía fabricante de productos químicos tiene 220 litros de una solución diluida a una concentración del 40 por ciento (de modo que 40 por ciento de los 220 litros, u 88 litros, serían de sustancia química). Se agregan 20 litros de la sustancia química (de modo que habría 220 + 20 o 240 litros de solución y 88 + 20 o 108 litros serían de sustancia química). La concentración sería del 108/240 = 45 por ciento.

Ejemplo 3

Una estimación del peso ideal de un hombre es de 106 libras para los primeros cinco pies de estatura y de seis libras por cada pulgada

adicional. Si un basquetbolista pesa 250 libras y ése es su peso ideal, ¿cuánto mide?

Solución

Sea h = altura en pulgadas
$h - 60$ = pulgadas sobre 5 pies
250 = peso ideal

$$\begin{aligned}
\text{Peso ideal} &= 106 + 6 \text{ (números de pulgadas sobre 5 pies)} \\
250 &= 106 + 6(h - 60) \\
250 &= 106 + 6h - 360 \\
250 &= 6h - 254 \\
250 + 254 &= 6h - 254 + 254 \\
504 &= 6h \\
504/6 &= 6h/6 \\
84 &= h
\end{aligned}$$

Por lo tanto, su altura es 84 pulgadas o 7 pies.

Solución alternativa:

Sea i = número de pulgadas sobre 5 pies
Altura = 5 pies + i
$6i$ = peso sobre 106 libras
$6i = 250 - 106$
$6i = 144$
$i = 24$

Por lo tanto, su altura es 5 pies + 24 pulgadas o 5 pies + 2 pies = 7 pies.

Verificación: Si mide 7 pies, debería pesar 106 libras para los primeros 5 pies y 6 × 24 o 144 libras para las 24 pulgadas restantes. Es decir, pesaría 106 + 144 o 250 libras, lo cual concuerda con la información de este problema.

En ocasiones, los programadores se enfrentan a problemas que pueden resolverse con ecuaciones.

Ejemplo 4

Una programadora de Pascal quiere imprimir una lista de nombres de empleados y números del seguro social. Ella especifica que cada nombre debe imprimirse en las 20 primeras posiciones de una línea. Se dice que "la amplitud de campo" es 20. El número del seguro social también tiene una amplitud de campo de 20. Cuando el programa se corre, todos los nombres están justificados a la derecha (o alineados de tal modo que la última letra de cada uno está en la posición 20).

Ella puede justificar los nombres a la izquierda especificando que cada uno se imprima con una amplitud de campo igual a la longitud (número de caracteres) del propio nombre. Sea que L represente esa longitud. Encontrar un fórmula para la amplitud de campo del número del seguro social que mantendrá estos números en las mismas posiciones que antes.

Solución

Sea W = la amplitud de campo de los números del seguro social
L = la longitud del nombre
40 = el número total de posiciones por usarse

$$L + W = 40$$
$$W = 40 - L.$$

Ejemplo 5

Si el segundo campo del ejemplo 4 fuera el nombre de la calle de una dirección, la programadora también hubiera querido justificar a la izquierda los valores de la segunda columna. Encontrar una fórmula para la segunda amplitud de campo.

Solución

Para justificar a la izquierda la dirección es necesario saber su longitud exacta, tal como se usó la longitud del nombre en el ejemplo anterior.

Sea W = la amplitud de campo de la dirección
L = la longitud del nombre
A = la longitud de la dirección

Las 20 primeras posiciones estarán ocupadas por el nombre y algunos espacios en blanco. Las A posiciones siguientes estarán ocupadas por la dirección. La longitud total de la línea impresa será, entonces, $20 + A$, pero ésta es también la suma de las amplitudes de los campos. Se tiene:

$$L + W = 20 + A$$
$$W = 20 + A - L.$$

Ejercicios

Usar una ecuación para resolver los problemas siguientes. Ver los ejemplos 1 al 5.

1. Las calificaciones de un estudiante son 85, 89, 92 y 90. ¿Qué calificación deberá sacar en el quinto examen para tener un promedio de 91?
2. La fórmula para determinar la clasificación de unidades BTU de un aparato de aire acondicionado es: BTU* = área × factor de exposición × factor climático. Si un aparato de aiere acondicionado con una clasificación de 1 520 BTU se usa con un factor de exposición de 20 y con un factor climático de 0.95, ¿cuáles serán las dimensiones de la habitación que puede enfriar?
3. Cuando se deja caer un objeto, la distancia que recorre en t segundos es $s = \frac{1}{2} gt^2$. Calcular la constante gravitacional g si se sabe que en 2 segundos un objeto desciende 19.5 m.
4. La fórmula para convertir temperatura Fahrenheit (F) a temperaturas Celsius (C) es $F = \frac{9}{5}(C) + 32$. ¿En qué temperatura serán numéricamente iguales las lecturas en grados Fahrenheit y Celsius?
5. La regla del 72 establece que una estimación de los años necesarios para duplicar una inversión al R por ciento puede obtenerse dividiendo 72 entre R. ¿Qué tasa de interés se requiere para duplicar una inversión en 4.8 años?
6. Si el duplicar la tasa de interés actual significa que una inversión se duplicaría en 12 años, aplicar la regla del 72 (ver el problema 5 anterior) para encontrar la tasa actual.
7. Diez litros de una sal diluidos en agua dan una solución al 90 por ciento de sal. ¿Cuánta agua habría que agregar para diluirla al 70 por ciento?
8. Dos litros de una sal diluidos en agua dan una solución al 70 por ciento de sal. ¿Cuánta sal habría que agregar para aumentar la concentración de la solución al 80 por ciento?
9. Una ejecutiva quiere participar en una cuenta IRA. Desea repartir $2 000 de tal modo que una parte se invierta a una tasa fija al 8 por ciento y el resto se deposite en una cuenta de interés variable que pague 9 por ciento para el año en curso. Si quiere ganar $175 al final del año, ¿cuánto debe invertir en cada tasa de interés?
10. Una tienda especializada vende mezclas raras de diferentes tipos de café. Para liquidar las existencias de dos tipos de grano, el propietario quiere mezclarlos. Hay 20 libras de café que cuestan $4.00 cada una y 15 libras de café que cuestan $4.50 cada una. ¿En cuánto se vendería la mezcla?
11. A una vendedora de bienes raíces se le paga una comisión de 2 por ciento por cada venta que realice y una comisión de 1 por ciento por cada propiedad que incorpore en la lista de ventas. Estima que incorporará propiedades por un valor del doble de sus ventas. Si desea

* N.R.T. *British Thermal Unit.*

tener un ingreso anual de $40 000, encontrar las ventas totales que debe realizar y el valor total de los bienes raíces que debe incorporar en la lista de ventas.

12. A un agente de bienes raíces se le paga cierto porcentaje de comisión por cada propiedad que incorpore en la lista de ventas, y por cada propiedad que venda se le paga el doble de esa comisión. Si incorpora $300 000 y vende $600 000 para una comisión de $45 000, ¿a cuánto asciende el porcentaje de la comisión por cada enlistamiento y venta?
13. Dos automóviles salen del punto A al mismo tiempo en la misma dirección. El más rápido viaja a 55 km/h, mientras que el más lento lo hace a 48 km/h. ¿Cuánto tiempo se requerirá para que el automóvil más veloz se adelante 15.4 kilómetros?
14. Dos trenes salen del mismo lugar en direcciones opuestas. El tren más rápido viaja a 110 km/h, mientras que el más lento lo hace a 96 km/h. ¿Cuánto tiempo se requerirá para que los trenes estén separados 309 kilómetros?
15. Dos personas empiezan a caminar desde los puntos A y B, que están a 13 kilómetros de distancia, para encontrarse. Una de ellas camina 0.5 km/h más rápido que la otra. Si se encuentran después de dos horas, ¿a qué velocidad caminaba cada una?
16. Un comerciante quiere obtener una ganancia de 15 por ciento sobre el costo de un artículo por el que pagó $102. ¿Cuál deberá ser el precio de venta?
17. Un comerciante quiere obtener una ganancia de 15 por ciento sobre el precio de venta de un artículo que cuesta $102. ¿Cuál debe ser el precio de venta?
18. Una encuesta revela que 975 personas, las cuales representan el 65 por ciento de la muestra, piensan que los estudiantes de bachillerato deberían aprobar un examen general para graduarse. ¿A cuántas personas se entrevistó?
19. Una encuesta revela que el 86 por ciento de las personas encuestadas favorecen cierto proyecto de ley y que el 4 por ciento están indecisas. Si se entrevistó a 1 500 personas, ¿cuántas de ellas estuvieron en contra?
20. El peso ideal de una mujer puede estimarse tomando 100 libras para los primeros cinco pies de estatura y cinco libras por cada pulgada adicional. Sin embargo, debe deducirse 10 por ciento para las mujeres de constitución delgada. ¿Cuánto medirá una mujer de constitución delgada si su peso ideal es de 108 libras?
21. Un hombre de constitución normal que mide 5 pies 6 pulgadas pesa 143 libras. ¿Por cuántas libras se excede de su peso ideal? (Ver el ejemplo 3 para la fórmula.)
22. Una mujer de constitución normal que mide 5 pies 6 pulgadas pesa 143 libras. ¿Cuál es su peso ideal y en qué porcentaje lo excede? (Ver el problema 20 para la fórmula.)
23. Un hombre puede quemar 350 calorías por hora jugando tenis y 110 calorías lavando trastes. ¿Cuántas horas tendría que lavar trastes para quemar tantas calorías como en una hora y media de jugar tenis?

24. Una mujer puede quemar 250 calorías por hora jugando golf y 125 calorías por hora planchando. Si juega golf el doble de lo que plancha y quema un total de 750 calorías, ¿cuánto tiempo planchó?
25. Un hombre puede quemar 250 calorías por hora mientras juega boliche y 80 calorías mientras ve televisión. Si juega boliche dos horas y después mira televisión durante dos horas, ¿cuántas onzas de cerveza puede beber (14 calorías por onza) para restituir las calorías quemadas?
*26. Si cuatro gatos pueden atrapar cuatro ratones en cuatro horas, ¿cuántos ratones puede atrapar un gato en una hora?
*27. Si una persona obtuvo un aumento del 10 por ciento el año pasado y una reducción del 10 por ciento en el salario este año, y está ganando ahora $19 800, ¿cuál era su salario antes del aumento?
*28. Una bicicleta y un automóvil salen al mismo tiempo de los puntos A y B, respectivamente. Avanzan de tal modo que se encontrarán, y el automóvil viaja al doble de la velocidad de la bicicleta. Si el automóvil parte diez minutos después que la bicicleta, se encontrarían 3 km más cerca del punto B. Encontrar sus velocidades.

6.4. ECUACIONES CUADRÁTICAS

En la sección 1 se resolvieron ecuaciones lineales con una variable. En una ecuación lineal el exponente máximo de la variable es 1. En esta sección se resuelven ecuaciones cuadráticas con una variable. En una ecuación cuadrática el exponente máximo de la variable es 2.

Definición

Una ecuación cuadrática en x es aquella que puede expresarse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde, a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

A la expresión $ax^2 + bx + c = 0$ se le llama la forma *normal*. Hay dos características importantes de esta forma de la ecuación. Primera, uno de los miembros de la ecuación debe ser igual a cero. Segunda, los términos deben aparecer en el orden descendente de sus exponentes. Para resolver una ecuación cuadrática se factorizará la expresión y se utilizará la propiedad especial del cero que se enuncia a continuación.

Propiedad especial del cero

Si a y b son dos números reales tales que $ab = 0$, entonces $a = 0$, o $b = 0$.

Esta propiedad establece que si el producto de dos números es 0, entonces uno de ellos debe ser cero. El cero es el único número que tiene esta propiedad. En cambio, considérese $ab = 5$. El 5 podría ser uno de los factores, ya que $1(5) = 5$, pero también podría tenerse $\frac{1}{2}(10) = 5$ o $\frac{1}{3}(15) = 5$, y así sucesivamente.

Es importante tener una ecuación cuadrática en la forma normal para que sea posible usar la propiedad especial del cero. Sin embargo, en la forma normal de una ecuación cuadrática intervienen términos, y la propiedad especial del cero requiere factores. La factorización se facilitará si los términos están dispuestos en el orden descendente de los exponentes.

Considérese $6x^2 + x - 2 = 0$. Es una ecuación cuadrática y está en la forma normal, con $a = 6$, $b = 1$ y $c = -2$. (A fin de que la ecuación siga el patrón $ax^2 + bx + c = 0$, es necesario incluir el signo negativo como parte del número c.) Se factoriza la expresión del primer miembro para obtener $(2x - 1)(3x + 2) = 0$. Puesto que el producto de ellos es cero, la propiedad especial del cero establece que uno de los factores debe ser cero. Es decir, $(2x - 1) = 0$ o $(3x + 2) = 0$. Pero ahora se tienen dos ecuaciones *lineales* en lugar de una ecuación *cuadrática*. Si $2x - 1 = 0$, se tiene $x = \frac{1}{2}$. Si $3x + 2 = 0$, se tiene $x = -\frac{2}{3}$. Por lo tanto, la solución de la ecuación $6x^2 + x - 2 = 0$ es $x = \frac{1}{2}$ o $x = -\frac{2}{3}$.

Para resolver una ecuación cuadrática:

1. Si la ecuación no está en la forma normal $ax^2 + bx + c = 0$, escribir una ecuación equivalente que esté en la forma normal (por ejemplo, sumar o restar el mismo término o términos en ambos miembros de la ecuación para hacer uno de ellos igual a cero, y ordenar los términos en el orden descendente de los exponentes.
2. Factorizar el polinomio.
3. Usar la propiedad especial del cero para hacer cada factor igual a cero.
4. Resolver las ecuaciones lineales resultantes.

Ejemplo 1

Resolver $x^2 = 9$.

Solución

1. La ecuación no está en la forma normal. Se resta 9 en ambos miembros.

$$x^2 - 9 = 9 - 9$$
$$x^2 - 9 = 0$$

2. Se factoriza: $(x - 3)(x + 3) = 0$.
3. Se hace cada factor igual a cero: $x - 3 = 0$ o $x + 3 = 0$.
4. Se resuelven las ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{llll} x - 3 & = 0 & \text{o} & x + 3 = 0 \\ x - 3 + 3 & = 0 + 3 & \text{o} & x + 3 - 3 = 0 - 3 \\ x & = 3 & \text{o} & x = -3. \end{array}$$

Ejemplo 2

Resolver $y^2 - 5y = 0$.

Solución

1. La ecuación está en la forma normal.
2. Se factoriza: $y(y - 5) = 0$.
3. Se hace cada factor igual a cero: $y = 0$ o $y - 5 = 0$.
4. Se resuelven las ecuaciones lineales: $y = 0$ o $y - 5 + 5 = 0 + 5$
   $y = 0$ o $y = 5$.

Ejemplo 3

Resolver $z^2 + 6 = 5z$.

Solución

1. La ecuación no está en la forma normal. Se resta $5z$ en ambos miembros.

$$z^2 - 5z + 6 = 5z - 5z$$
$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

2. Se factoriza: $(z - 2)(z - 3) = 0$
3. Se hace cada factor igual a cero: $z - 2 = 0$ o $z - 3 = 0$.
4. Se resuelven las ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{llll} z - 2 & = 0 & \text{o} & z - 3 = 0 \\ z - 2 + 2 & = 0 + 2 & \text{o} & z - 3 + 3 = 0 + 3 \\ z & = 2 & \text{o} & z = 3. \end{array}$$

Ejemplo 4

Resolver $6x^2 - 15x + 9 = 0$.

Solución

La ecuación está en la forma normal, de modo que se factoriza:

$$3(2x^2 - 5x + 3) = 0$$
$$3(2x - 3)(x - 1) = 0.$$

Uno de los factores debe ser cero. Es imposible tener $3 = 0$, por lo que debe tenerse:

$$\begin{array}{lll} 2x - 3 = 0 & \text{o} & x - 1 = 0 \\ 2x = 3 & \text{o} & x = 1 \\ x = 3/2 & \text{o} & x = 1. \end{array}$$

La aplicación de la factorización para resolver ecuaciones cuadráticas es el método más rápido y sencillo en muchos problemas. Sin embargo, el método tiene una seria desventaja. No es posible resolver todas las ecuaciones cuadráticas por factorización. Por ejemplo, $x^2 - 3x + 1 = 0$ no puede resolverse con este método. En la siguiente sección se aprenderá a resolver este tipo de problema.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. $x^2 - 5x + 4 = 0$
2. $y^2 + 7y + 12 = 0$
3. $z^2 + z - 6 = 0$
4. $x^2 - 10x + 24 = 0$
5. $m^2 + 2m - 24 = 0$
6. $p^2 - 5p - 24 = 0$
7. $x^2 - x = 2$
8. $y^2 - 2y = 8$
9. $z^2 - 9z + 8 = 0$
10. $x^2 + 6x + 8 = 0$
11. $6m^2 - 13m + 6 = 0$
12. $3p^2 - 5p + 2 = 0$
13. $4x^2 + 4x = 3$
14. $6y^2 + 5y + 1 = 0$
15. $9z^2 - 6z + 1 = 0$
16. $6x^2 - 7x = 3$
17. $2m^2 + 2m = 0$
18. $3v^2 + 6v = 0$
19. $x^2 - 1 = 0$
20. $y^2 - 16 = 0$
21. $r^2 = 16$
22. $s^2 = 25$
23. $25x^2 = 36$
24. $25y^2 = 36y$
25. $6z^2 - 13z = 5$
26. $2x^2 + 5x = 3$
27. $6p^2 = 3 - 7p$
28. $m^2 = 11m - 24$
29. $r^2 - 10 = 3r$
30. $-s^2 + 21 = 4s$
31. $x^2 - 8x + 15 = 0$
32. $2y^2 - 7y = 15$
33. $3z^2 + 13z = 10$
34. $3x^2 + 17x + 10 = 0$
35. $2y^2 = 8$
36. $2z^2 = 8z$

*37. Un objeto cae de acuerdo con la fórmula $s = -16t^2 + 144$, donde s representa la distancia del objeto a la superficie del suelo en cualquier tiempo t en segundos. ¿En cuánto tiempo un objeto descenderá 25 metros?

*38. Una escalera de mano de 8 metros se coloca de tal modo que toca un muro a 5 metros sobre el suelo. Si la parte inferior de la escalera se

jala 4 metros, ¿cuánto se deslizará hacia abajo la parte superior de la misma? (Sugerencia: Usar el teorema de Pitágoras.)

*39. Un joven estaba sentado a 550 metros del extremo delantero de un tren. Cuando el tren iniciaba su marcha, desde su ventanilla vio correr a su perro hacia el frente del tren a la altura de la ventanilla. ¿Qué distancia corrió el perro si el tren recorrió 730 metros en el mismo tiempo y ambos avanzaron con una velocidad constante?

6.5. LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Si una ecuación cuadrática está en la forma normal $ax^2 + bx + c = 0$, sólo difiere de cualquier otra ecuación del mismo orden en los valores de a, b y c. Por consiguiente, la solución de la ecuación depende de los valores de a, b y c. La expresión conocida como *fórmula cuadrática* da la solución de esta ecuación expresada en la forma normal. Proporciona la solución de ecuaciones cuadráticas que no puede factorizarse, así como de las que sí pueden factorizarse.

Fórmula cuadrática

Para una ecuación cuadrática en la forma normal $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1

Resolver $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Solución

En esta ecuación $a = 1$, $b = -3$ y $c = 1$. Al sustituir estos valores en la fórmula se obtiene:

$$x = \frac{-b \qquad b^2 \quad -4ac}{\frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}}$$

$$\frac{2a}{x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

El signo ± indica que hay dos soluciones. Una de ellas contiene el signo más y la otra el signo menos. Es decir,

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ es una solución y } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ es la otra.}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$, se le llama el *discriminante*. Cuando $b^2 - 4ac < 0$ ya no se necesita terminar el cálculo, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. Un programa de computadora que use la fórmula cuadrática debe incluir una verificación para determinar si el discriminante es negativo antes de efectuar el cálculo.

A diferencia de la factorización, la fórmula cuadrática siempre produce la solución de una ecuación cuadrática cuando ésta existe. Sin embargo, en muchos problemas este método no es tan eficiente como la factorización. El método se resume de la manera siguiente.

Para resolver una ecuación de segundo grado utilizando la fórmula cuadrática:

1. Si la ecuación no está en la forma normal $ax^2 + bx + c = 0$, escribir una ecuación equivalente que esté en la forma normal (por ejemplo, sumar o restar el mismo término o términos en ambos miembros para hacer uno de ellos igual a cero, y disponer los términos en el orden descendente de los exponentes).
2. Identificar los valores de a, b y c.
3. Sustituir los valores de a, b y c en la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. a. Usar el signo +, simplificar la expresión para obtener una solución.
   b. Usar el signo −, simplificar la expresión para obtener la otra solución.

Ejemplo 2

Usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solución

1. La ecuación está en la forma normal.
2. $a = 1, b = -5$ y $c = 6$.

3. $x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

4. $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$x = \dfrac{5 + 1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ o $x = \dfrac{5 - 1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2.$

Ejemplo 3

Usar la fórmula cuadrática para resolver $2x^2 + 3x = -1$.

Solución

1. La ecuación no está en la forma normal, por lo que se suma 1 en ambos miembros.

$2x^2 + 3x + 1 = -1 + 1$
$2x^2 + 3x + 1 = 0$

2. $a = 2, b = 3,$ y $c = 1$

3. $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

4. $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4}$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{4}$

$x = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$

$x = \dfrac{-3 + 1}{4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$ o $x = \dfrac{-3 - 1}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1.$

Ejemplo 4

Usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 - 5x = 0$.

Solución

La ecuación está en la forma normal. $a = 1$, $b = -5$ y $c = 0$.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 0}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{5 \pm 5}{2} = 5 \text{ o } 0.$$

Aun cuando la raíz cuadrada que se presenta en la fórmula no es necesariamente un entero, es posible escribirla en una forma simplificada. Puesto que $\sqrt{xy} = (xy)^{1/2} = x^{1/2}\,(y^{1/2}) = \sqrt{x}\,\sqrt{y}$, puede ser posible factorizar el número que está dentro del radical de tal modo que la raíz cuadrada de uno de los factores sea un entero. Por ejemplo,

$$\sqrt{18} = \sqrt{9(2)} = \sqrt{9}\,\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Ejemplo 5 Usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 - 5 = 0$.

Solución

La ecuación está en la forma normal. $a = 1$, $b = 0$ y $c = -5$.

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{-0 \pm \sqrt{0 + 20}}{2} = \frac{\pm\sqrt{20}}{2} =$$

$$\frac{\pm\sqrt{4(5)}}{2} = \frac{\pm\sqrt{4}\,\sqrt{5}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{5}}{2} = \pm\sqrt{5}.$$

Ahora que el lector sabe cómo usar la fórmula, quizás se pregunte cómo se sabe que producirá siempre la solución, cuando ésta exista. Se empieza con la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$. El objetivo es resolver esta ecuación para x.

1. Se multiplican ambos miembros de la ecuación por $4a$. Se eligió $4a$ para facilitar la factorización de la expresión del primer miembro. Se tiene: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.
2. Se resta $4ac$ en ambos miembros de la ecuación. Con este paso los dos términos que contienen a x se quedan en el primer miembro. Se tiene $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.
3. Se suma b^2 en ambos miembros de la ecuación. Pudo haberse sumado un número *cualquiera*, siempre que se hiciera en ambos miembros de la ecuación. Sucede simplemente que con b^2

se facilitará la factorización del primer miembro de la ecuación. Se tiene $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$.

4. Se factoriza la expresión del primer miembro. Se tiene

$$(2ax + b)(2ax + b) = b^2 - 4ac$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

5. Puesto que se está despejando x, es necesario eliminar el cuadrado en el primer miembro antes de proceder al paso siguiente. Encontrar la raíz cuadrada es la operación inversa de la elevación al cuadrado. Por lo tanto, se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación. El radical, que restringe la raíz cuadrada a un valor positivo, no figuraba en el problema original. Es decir, no quiere restringirse la respuesta sólo a la raíz cuadrada positiva, de modo que se introduce un signo ± para indicar ambas raíces cuadradas. Se tiene

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

o, puesto que la raíz cuadrada "rehace" el cuadrado, se tiene

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

6. El paso siguiente será eliminar el término b.

$$2ax + b - b = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\text{o } 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

7. Por último, se elimina el factor $2a$.

$$\frac{2ax}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{o } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A partir de esta deducción puede verse que desde un punto de vista teórico, la fórmula cuadrática es totalmente precisa. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, las limitaciones de la aritmética de las computadoras pueden conducir a resultados no exactos. Por ejemplo, si $b > 0$ y su valor es muy grande en comparación con a y c, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ estará muy cerca de $\sqrt{b^2} = b$. Con la fórmula se tendría la solución,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y x está muy cerca de

$$\frac{-b+b}{2a}=0.$$

William Kahan* concibió una solución alternativa.

La fórmula cuadrática para una solución de computadora es:

$$\text{Si } b \geqslant 0 \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$\text{Si } b < 0 \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Las soluciones de la ecuación $0.5x^2 + 200\,000x + 0.5 = 0$ obtenidas por computadora son aproximadamente 0.00021 y $-$ 400 000 utilizando la fórmula cuadrática común. Con la fórmula opcional se obtienen $-$ 0.0000025 y $-$ 400 000. La fórmula opcional se presenta aquí tan sólo para llamar la atención del lector hacia el hecho de que las consideraciones para resolver un problema matemáticamente y para resolverlo con una computadora, con frecuencia, son diferentes. Escribir un programa de computadora que produzca siempre una solución correcta para un tipo particular de problema requiere más que la simple codificación de una fórmula o procedimiento algebraico para la computadora.

Ejercicios

Usar la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones siguientes. Ver los ejemplos 1 al 5.

1. $x^2 - 4x + 2 = 0$
2. $y^2 - 3y + 1 = 0$
3. $z^2 - 5z + 3 = 0$
4. $2x^2 - 3x - 1 = 0$
5. $2y^2 + 5y = 1$
6. $2p^2 + 3p = 7$
7. $q^2 - 21 = 0$
8. $r^2 - 43 = 0$
9. $2x^2 - 7x = 0$
10. $3y^2 + 2y - 3 = 0$
11. $3z^2 - z - 1 = 0$
12. $x^2 - 5x = 7$
13. $p^2 - 6p = 7$
14. $10q^2 + q - 1 = 0$

* Forsythe, George E. "Solving a Quadratic Equation on a Computer", en *The Mathematical Sciences*, editada por COSRIMS, the MIT Press, 1969.

15. $r^2 + 8r + 1 = 0$
16. $x^2 + 3x + 1 = 0$
17. $2y^2 + 4y = 1$
18. $3z^2 + 4z = 1$
19. $x^2 + 5x + 2 = 0$
20. $y^2 - 5y = 2$
21. $3z^2 + z = 1$
22. $x^2 = 3$
23. $y^2 = 3y$
24. $z^2 - 7z = 8$

⇒25. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que indique un algoritmo para resolver una ecuación cuadrática (con $c \neq 0$) por computadora. Si $b^2 - 4ac < 0$, tomar las medidas necesarias.

*26. Resolver los problemas 1 al 4 de la sección 6.4 utilizando la fórmula cuadrática para computadoras para verificar que las soluciones son correctas.

*27. Suponiendo que $x \neq 0$, multiplicar la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ por $1/x^2$.

(a) Usar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación para $1/x$, e invertir la solución para obtener una expresión para x.

(b) Si $b \geqslant 0$, se sustituyó la solución $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ por $\dfrac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$ para evitar $\dfrac{-b + b}{2a}$. Si $b < 0$, ¿por qué se sustituye $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ por $\dfrac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$?

*28. Una caja cúbica que mide 3 m × 3 m × 3 m se empuja contra un muro. Una escalera de mano de 15 m de longitud se coloca de tal modo que descansa contra el borde de la caja y la pared. Usar ecuaciones cuadráticas para determinar a qué distancia de la caja está la parte inferior de la escalera.

6.6. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Los antiguos matemáticos babilonios sabían resolver ecuaciones cuadráticas. Sin embargo, el método para resolver ecuaciones cúbicas (ecuaciones de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, con $a, b, c, d \in R$ y $a \neq 0$) no se encontró sino hasta el siglo XVI. El método para resolver ecuaciones de cuarto grado (ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, con $a, b, c, d, e \in R$ y $a \neq 0$) se encontró poco después. El éxito obtenido con las ecuaciones cúbica y de cuarto grado coronó 300 años de búsqueda de un método para resolver ecuaciones de grados superiores. A principios del siglo XIX un joven matemático noruego, Neils Henrik Abel, demostró que no puede haber una fórmula

para resolver ecuaciones de quinto grado (ecuaciones de la forma $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, con $a, b, c, d, e, f \in R$ y $a \neq 0$). Sin embargo, la búsqueda hizo evolucionar a varios matemáticos. En particular, el trabajo de Evariste Galois en Francia derivó en importantes conceptos del álgebra moderna.

No obstante que existe un método para resolver la ecuación cúbica general $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, es un procedimiento largo y complicado. Algunas ecuaciones cúbicas (y de grados superiores) son factorizables, pero son casos especiales. Por ejemplo, $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ puede escribirse como

$$x(x^2 + 5x + 6) = 0 \text{ o}$$
$$x(x + 2)(x + 3) = 0.$$

Por tanto, se tiene $x = 0$, $x + 2 = 0$ o $x + 3 = 0$.

Es decir, $x = 0$, $x = -2$ o $x = -3$.

Para resolver una ecuación factorizable de tercer grado o mayor:

1. Si no está en la forma normal, escribir una ecuación equivalente que esté en la forma normal (i.e., sumar o restar el mismo término o términos en ambos miembros de la ecuación para hacer uno de ellos igual a cero, y disponer los términos en el orden descendente de los exponentes).
2. Factorizar completamente.
3. Hacer cada factor igual a 0.
4. Resolver las ecuaciones lineales o cuadráticas resultantes.

Ejemplo 1

Resolver $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Solución

1. La ecuación está en la forma normal.
2. Se factoriza $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$, que puede factorizarse aún más como $(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3) = 0$.
3. $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, o $x + 3 = 0$
4. $x = 2$, $x = -2$, $x = 3$, o $x = -3$.

Ejemplo 2

Resolver $x^3 + 3x^2 + x = 0$.

Solución

1. La ecuación está en la forma normal.
2. Se factoriza $x(x^2 + 3x + 1) = 0$. El segundo factor es primo, por lo que se tiene
3. $x = 0$ o $x^2 + 3x + 1 = 0$.
4. $x = 0$, o por la fórmula cuadrática $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

La computadora es una herramienta útil para encontrar soluciones *aproximadas* a las ecuaciones que no se prestan para encontrar soluciones *exactas* inmediatas.

Como un ejemplo de un método *numérico** (por oposición a uno *algebraico*), se examinará el procedimiento de bisección para encontrar la solución de ecuaciones polinómicas de grado superior. (Una ecuación polinómica tiene la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0, \text{ donde } a_i \in R.)$$

La bisección es sólo uno de varios métodos disponibles, pero ilustra la naturaleza global de los procesos *iterativos*. El planteamiento es partir de una conjetura, usar esa conjetura para obtener una mejor, y así sucesivamente, hasta llegar a la respuesta con la precisión deseada.

Considérese la ecuación $x^3 + x - 3 = 0$. Supóngase que se quiere que la solución esté redondeada a centésimos. Podría decirse que se intenta encontrar el valor de x que hace el polinomio $x^3 + x - 3$ igual a cero. Al realizar algunos cálculos preliminares, se descubre que cuando $x = 1$, $x^3 + x - 3 = -1$ y que cuando $x = 2$, $x^3 + x - 3 = 7$. Es decir, si a x se le asignan valores entre 1 y 2, el polinomio $x^3 + x - 3$ toma valores entre -1 y 7. Puesto que el 0 está en el intervalo entre -1 y 7, se sabe que el valor que se busca debe estar en el intervalo de 1 (que produjo el -1) y 2 (que produjo el 7). Para la primera suposición se biseca el intervalo y se prueba 1.5, que es el promedio entre 1 y 2. Cuando $x = 1.5$, el polinomio es igual a $(1.5)^3 + 1.5 - 3 = 1.875$.

Puesto que el polinomio debe asumir el valor cero en algún punto entre -1 y 1.875 (por ejemplo, entre un valor negativo y uno positivo), el valor de x debe buscarse entre 1 (que produjo el -1) y 1.5 (que produjo el 1.875). Se biseca el intervalo de 1 a 1.5 y se prueba 1.25, que es el promedio entre 1 y 1.5, en la segunda conjetura.

*N.R.T. Se conoce como "Métodos Numéricos" a la rama de las matemáticas que enseña cómo obtener soluciones muy aproximadas de ecuaciones, mediante métodos orientados a las características de la computadora.

El proceso se continúa hasta que, estando x redondeada a la centésima más próxima, se obtenga la misma suposición dos veces seguidas. La repetición indica que los cálculos adicionales no producirán una suposición mejor. (Los programas de computadora pueden escribirse para terminar la ejecución cuando la diferencia entre dos valores de x sea menor que una cantidad predeterminada, tal como 0.005.) Es más sencillo entender los pasos aplicados si los resultados se anotan en una tabla (ver la tabla 6.1).

Tabla 6.1

Iteración núm.	x	$x^3 + x - 3$	*Valor redondeado de* x
0	1.00000	−1.00	1.00
0	2.00000	7.00	2.00
1	1.50000	1.88	1.50
2	1.25000	0.20	1.25
3	1.12500	−0.45	1.13
4	1.18750	−0.14	1.19
5	1.21875	0.03	1.22
6	1.203125	−0.06	1.20
7	1.2109375	−0.01	1.21
8	1.21484375	0.01	1.21

Las diferentes conjeturas se obtienen del hecho de saber que $x^3 + x - 3$ asumirá valores positivos y negativos y que el cero debe estar en algún punto entre estos valores. Cada vez que se agrega un nuevo renglón en la tabla, se encuentra la última entrada en la columna abajo de $x^3 + x - 3$ que tiene el signo *opuesto*. Al tomar el promedio de los dos valores de x no redondeados, se obtiene el siguiente valor de x. Obsérvese que cuando los valores de x se aproximan a 1.21, los valores de $x^3 + x - 3$ tienden a 0.

Aun cuando se quiere encontrar una respuesta final redondeada a centésimas, los cálculos de x en el ejemplo no están redondeados. El redondear todos los cálculos dos cifras introduciría un error de redondeo inaceptablemente alto; por lo tanto, el paso del redondeo se deja hasta el final. Sin embargo, los valores del polinomio sí están redondeados, porque sólo interesa el signo que tengan. El procedimiento puede generalizarse como un algoritmo.

Para resolver una ecuación polinómica en x utilizando el método de bisección:

1. Se encuentra la vecindad de la solución.
   a. Se encuentra un valor de x que haga positivo el polinomio.
   b. Se encuentra un valor de x que haga negativo el polinomio.
2. En la primera iteración:
   a. Se usa el promedio de los valores de x del paso 1.
   b. Se calcula el valor del polinomio.
   c. Se redondea el valor de x con la precisión deseada.
3. Para la siguiente iteración:
   a. Se encuentra la última iteración para la que el valor del polinomio tiene el signo opuesto del valor calculado para el polinomio en el paso anterior.
   b. Se usa el promedio de los valores correspondientes de x para la siguiente aproximación. Se usarán tantas cifras decimales como la calculadora o computadora lo permita.
   c. Se calcula el valor del polinomio.
   d. Se redondea el valor de x con la precisión deseada.
4. Se repite el paso 3 hasta que se obtenga dos veces consecutivas el mismo valor de x en el paso 3 como el valor redondeado de x.

Ejemplo 3

Resolver $x^3 + x - 3 = 0$ para x redondeada a milésimas.

Solución

En la tabla siguiente se da una solución generada en una computadora. Los valores de x se presentan redondeados a milésimas, aun cuando *se usaron más dígitos en los cálculos.*

Iteración núm.	*Valor redondeado de x*	*Signo de* $x^3 + x - 3$
0	1.000	−
0	2.000	+
1	1.500	+
2	1.250	+
3	1.125	−
4	1.188	−
5	1.219	+
6	1.203	−
7	1.211	−
8	1.215	+
9	1.213	−
10	1.214	+
11	1.213	−
12	1.214	+
13	1.214	+

Después de la iteración 13, el valor redondeado de x aparece como 1.214 dos veces, de modo que ese número es la solución redondeada a milésimas. Obsérvese que, al aumentarse la precisión deseada de centésimas a milésimas, aumentó el número de iteraciones requeridas para encontrar la solución.

Si se usa una calculadora que no tenga la función de exponenciación o memoria, será muy tedioso anotar números que tengan cinco o seis cifras decimales. Pero la finalidad de trabajar estos problemas es aprender el procedimiento, y éste es el mismo si se usan tres cifras decimales u ocho. Por tanto, en el siguiente ejemplo se usarán tres cifras decimales en *cada* cálculo. Sin embargo, al utilizarse sólo una o dos cifras decimales más allá de la precisión deseada, puede introducirse un error de redondeo en la solución final.

Ejemplo 4

Resolver $x^5 - 27 = 0$ para x redondeada a centésimas.

Solución

1. Cuando $x = 1$, $x^5 - 27 = -26$.
   Cuando $x = 2$, $x^5 - 27 = 5$.
2. En la primera iteración se usa el promedio de 1 y 2, o 1.5. Cuando $x = 1.5$, el polinomio tiene el valor $(1.5)^5 - 27 = -19.406$.
3. En la segunda iteración se usan los valores correspondientes a

-19.406 y 5. Es decir, se promedian 2 y 1.5 para obtener 1.75. El polinomio tiene un valor de $(1.75)^5 - 27 = -10.587$.

4. En la tercera iteración se usan los valores de x correspondientes a -10.587 y 5. Es decir, se promedian 1.75 y 2 para obtener 1.875. El valor del polinomio es $(1.875)^5 - 27 = -3.826$.
5. En la cuarta iteración se usan los valores de x correspondientes a -3.826 y 5. Es decir, se promedian 1.875 y 2 para obtener 1.938. El valor del polinomio es 0.338.
6. En la quinta iteración se usan los valores de x correspondientes a 0.388 y -3.826. Es decir, se promedian 1.938 y 1.875 para obtener 1.907. El valor del polinomio es -1.780.
7. Las iteraciones 6 a la 10 se presentan en la tabla siguiente.

Iteración núm.	x	(*Redondeado*)	$x^5 - 27$
0	1	(1.00)	−26
0	2	(2.00)	5
1	1.5	(1.50)	−19.406
2	1.75	(1.75)	−10.587
3	1.875	(1.88)	−3.826
4	1.938	(1.94)	0.338
5	1.907	(1.91)	−1.780
6	1.923	(1.92)	−0.704
7	1.931	(1.93)	−0.152
8	1.935	(1.94)	0.127
9	1.933	(1.93)	−0.013
10	1.934	(1.93)	0.057

Puesto que el valor redondeado 1.93 aparece dos veces consecutivas, se dice que 1.93 es la solución redondeada a centésimas.

Ejercicios

Resolver las ecuaciones siguientes por factorización. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
2. $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
3. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
4. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
5. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
6. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
7. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
8. $4x^5 - 9x^3 = 0$
9. $2x^3 - 3x^2 + x = 0$
10. $6x^4 - 13x^3 + 6x^2 = 0$.

Usar el método de bisección para encontrar la solución (redondeada a centésimas) entre 1 y 2 para las ecuaciones siguientes. Ver los ejemplos 3 y 4.

11. $x^2 - 3 = 0$
12. $x^3 - x^2 - 1 = 0$
13. $x^2 - x - 1 = 0$
14. $x^3 - x^2 - x = 0$
15. $2x^3 - 5x - 3 = 0$

Usar el método de bisección para encontrar la solución (redondeada a décimas) entre 2 y 3 para las ecuaciones siguientes. Ver los ejemplos 3 y 4.

16. $x^2 - 6 = 0$
17. $x^3 - 15 = 0$
18. $3x^2 - 4x - 6 = 0$
19. $x^3 - x^2 - 7 = 0$
20. $2x^3 - 5x - 8 = 0$

Usar el método de bisección para encontrar la solución (redondeada a centésimas) entre 4 y 5 para la ecuaciones siguientes. Ver los ejemplos 3 y 4.

21. $x^3 - 100 = 0$
22. $x^4 - 500 = 0$
23. $x^3 - x^2 - 50 = 0$
24. $x^3 - 2x^2 - 10x = 0$

⇒25. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que indique un algoritmo para resolver una ecuación polinómica por el método de bisección.

6.7. ECUACIONES CON EXPRESIONES RACIONALES

En la sección 6.2 se aprendió que el denominador de una fórmula puede eliminarse multiplicándolo por el mcd. Esta técnica también puede aplicarse a ecuaciones en las que aparezcan expresiones racionales. Por ejemplo, para resolver $\frac{2}{2x-1} = \frac{x}{x+1}$, ambos miembros de la ecuación se multiplican por $(2x - 1)(x + 1)$, que es el mcd. Se tiene

$$(2x - 1)(x + 1)\left(\frac{2}{2x - 1}\right) = (2x - 1)(x + 1)\left(\frac{x}{x + 1}\right).$$

Los denominadores se cancelan, y queda

$$(x + 1)(2) = x(2x - 1)$$
$$2x + 2 = 2x^2 - x.$$

Al escribir la ecuación en la forma normal se tiene

$$0 = 2x^2 - 3x - 2$$
$$0 = (2x + 1)(x - 2).$$

Por tanto,

$$2x + 1 = 0 \text{ o } x - 2 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = 2.$$

Para verificar esta solución, primero se sustituye x por $-\frac{1}{2}$:

$$\frac{2}{-1-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{-2} = -1.$$

Después se sustituye x por 2:

$$\frac{2}{4-1} = \frac{2}{2+1}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Hasta este punto, cuando los denominadores han incluido variables, se ha dicho que puede suponerse que no hay denominadores iguales a cero. En adelante esta suposición no será válida. La solución de la ecuación que resulta de eliminar los denominadores puede producir un valor para el cual el denominador de una de las fracciones de la ecuación original sea cero. Tal valor no es solución de la ecuación original.

Para resolver una ecuación con expresiones racionales:

1. Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcd de todas las expresiones racionales de la ecuación.
2. Se resuelve la ecuación resultante.
3. Se elimina de la solución cualquier valor que produzca un denominador cero en la ecuación original.

Ejemplo 1

Resolver para x: $\dfrac{x}{x-3} = \dfrac{3}{x-3} + 3.$

Solución

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por $(x - 3)$

$$(x-3)\left(\frac{x}{x-3}\right) = (x-3)\left(\frac{3}{x-3} + 3\right)$$

$$\cancel{(x-3)}\left(\frac{x}{\cancel{x-3}}\right) = \cancel{(x-3)}\left(\frac{3}{\cancel{x-3}}\right) + (x-3)(3)$$

$x = 3 + (x - 3)(3)$ ya que se cancelan ambos denominadores.

$x = 3 + 3x - 9$ por la propiedad distributiva.

$x = -6 + 3x$ cuando se simplifica el primer miembro.

$-2x = -6$ después de restar $3x$ en ambos miembros.

$x = 3$ después de dividir ambos miembros entre -2.

Pero si $x = 3$, los dos denominadores de la ecuación original son iguales a cero. Por tanto, este problema no tiene solución.

Ejemplo 2

Resolver $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{-2}{(x+1)(x-3)}.$

Solución

Se multiplican ambos miembros por $3(x + 1)(x - 3)$, el mcd.

$$3(x+1)(x-3)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x+1}\right) = 3(x+1)(x-3)\left(\frac{-2}{(x+1)(x-3)}\right)$$

$$\cancel{3}(x+1)(x-3)\frac{1}{\cancel{3}} + 3\cancel{(x+1)}(x-3)\frac{1}{\cancel{x+1}}$$

$$= 3\cancel{(x+1)}\cancel{(x-3)}\frac{-2}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-3)}}$$

$(x + 1)(x - 3) + 3(x - 3) = 3(-2)$ ya que se cancelan los denominadores.

$x^2 - 3x + x - 3 + 3x - 9 = -6$ por la propiedad distributiva.

$x^2 + x - 12 = -6$ cuando se simplifica el primer miembro.
$x^2 + x - 6 = 0$ después de sumar 6 en ambos miembros.
$(x + 3)(x - 2) = 0$ cuando se factoriza el primer miembro.
$x + 3 = 0$ o $x - 2 = 0$
$x = -3$ o $x = 2$.

Las dos respuestas son soluciones válidas.

Cuando $x = -3$, se tiene $\frac{1}{3} + \frac{1}{-2} = \frac{-2}{(-2)(-6)}$

$$\frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{-2}{12} \text{ o } -\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Cuando $x = 2$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-2}{3(-1)}$ o $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Ejemplo 3

Resolver $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-2} = \frac{7x-8}{x^2-x-2}$.

Solución

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-2} = \frac{7x-8}{(x+1)(x-2)}.$$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcd,

$$(x + 1)(x - 2)$$

$$(x+1)(x-2)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-2}\right) = (x+1)(x-2)\left(\frac{7x-8}{(x+1)(x-2)}\right)$$

$$\cancel{(x+1)}(x-2)\frac{1}{\cancel{x+1}} + (x+1)\cancel{(x-2)}\frac{x}{\cancel{x-2}}$$

$$= \cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}\frac{7x-8}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}$$

$x - 2 + x(x + 1) = 7x - 8$ ya que se cancelan los denominadores.
$x - 2 + x^2 + x = 7x - 8$ por la propiedad distributiva.

$x^2 + 2x - 2 = 7x - 8$ después de simplicar el primer miembro.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ después de restar $7x$ y sumar 8 en ambos miembros.

$(x - 2)(x - 3) = 0$ cuando se factoriza el primer miembro.

Por tanto, $x - 2 = 0$ o $x - 3 = 0$.

Se tiene $x = 2$ o $x = 3$.

Pero $x = 2$ produciría un denominador cero en el problema original.

Se llega a la conclusión de que $x = 3$ es la única solución. Cuando $x = 3$, se tiene

$$\frac{1}{4} + 3 = \frac{21 - 8}{9 - 3 - 2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{12}{4} = \frac{13}{4}.$$

Ejemplo 4

Resolver $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{x}{x - 3} = \dfrac{4x - 6}{x^2 - 4x + 3}$.

Solución

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{x}{x - 3} = \frac{4x - 6}{(x - 1)(x - 3)}.$$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcd,

$$(x - 1)(x - 3).$$

$$(x - 1)(x - 3)\left(\frac{1}{x - 1} + \frac{x}{x - 3}\right) = (x - 1)(x - 3)\left(\frac{4x - 6}{(x - 1)(x - 3)}\right)$$

$$(\cancel{x - 1})(x - 3)\frac{1}{\cancel{x - 1}} + (x - 1)(\cancel{x - 3})\frac{x}{\cancel{x - 3}}$$

$$= (\cancel{x - 1})(\cancel{x - 3})\frac{4x - 6}{(\cancel{x - 1})(\cancel{x - 3})}$$

$$x - 3 + (x - 1)x = 4x - 6$$

$$x - 3 + x^2 - x = 4x - 6$$

$$x^2 - 3 = 4x - 6$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 3)(x - 1) = 0$$
$$x - 3 = 0 \text{ o } x - 1 = 0$$
$$x = 3 \text{ o } x = 1$$

Los dos valores producirían denominadores cero en la ecuación original. Se concluye que el problema no tiene solución.

A partir de los ejemplos 2, 3 y 4 puede verse que la eliminación de denominadores puede llevar a una ecuación cuadrática. Existe la posibilidad de que de las dos soluciones, ambas, sólo una o ninguna de ellas sea solución de la ecuación original que incluía expresiones racionales.

Ejercicios

Resolver las ecuaciones siguientes. Ver los ejemplo 1 al 4.

1. $\frac{x}{3} + \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$
2. $\frac{y-1}{4} + \frac{5}{3} = \frac{2y+7}{6}$
3. $\frac{2x+5}{3x} + \frac{7}{x} = 5$
4. $\frac{y}{4} + \frac{y-1}{6} = \frac{y+2}{3}$
5. $\frac{3z-2}{z} + \frac{7}{2z} = 9$
6. $\frac{x+5}{2x} - 3 = \frac{10}{x}$
7. $\frac{2a+3}{3a} + \frac{5}{3} = \frac{1}{a}$
8. $\frac{2}{y-1} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3y-3}$
9. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{5} = \frac{5x-1}{4x-4}$
10. $\frac{4}{z} + \frac{2}{3} = \frac{2z}{3}$

11. $\frac{x}{5} - \frac{5}{x} = \frac{2x-1}{30}$

12. $\frac{2y}{y+2} - \frac{3y}{y-2} = \frac{25}{y^2-4}$

13. $\frac{a+1}{a-3} - \frac{2a+2}{a-2} = \frac{6}{a^2-5a+6}$

14. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x^2-1}$

15. $\frac{2}{y-1} + \frac{3y}{y+2} = \frac{y+5}{y^2+y-2}$

16. $\frac{2z}{z-3} + \frac{1}{z+3} = \frac{2z}{z^2-9}$

17. $\frac{a-1}{a+1} - \frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2+2a-1}{a^2+3a+2}$

18. $\frac{m+1}{m-2} - \frac{m+2}{m-3} = \frac{-m^2+4}{m^2-5m+6}$

19. $\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2-3x-1}{2x^2+x}$

20. $\frac{3y}{3y-1} - \frac{2}{y+2} = \frac{-5y+4}{3y^2+5y-2}$

21. $\frac{1}{4p-2} + \frac{p}{p+3} = \frac{p^2-3p+3}{2p^2+5p-3}$

22. $\frac{a-2}{a+3} + \frac{a}{a-1} = \frac{a^2-2a+5}{a^2+2a-3}$

23. $\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{-3x-1}{2x^2+2x}$

24. $\frac{y-2}{y} + \frac{y}{2y-1} = \frac{y^2-4y+2}{2y^2-y}$

*25. Dos niños pueden remar en un bote a 12 km/h en aguas calmadas. Si pueden avanzar 12 km contra la corriente en el mismo tiempo en que avanzarían 20 km siguiendo la corriente, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

*26. Si la velocidad de la corriente es de 4 km/h y un recorrido de ida y vuelta de 12 km toma 1 hora y 52 minutos, ¿a qué velocidad reman en aguas tranquilas?

*27. Si se recorren 50 km a 50 km/h, pero el viaje de regreso se hace a 60 km/h, ¿cuál es la velocidad promedio del viaje completo?

6.8. LA DECLARACIÓN DE ASIGNACIÓN

El signo de igual tiene dos significados en muchos lenguajes de programación. Puede ser el mismo que en álgebra. Por ejemplo, puede quererse repetir cierta serie de pasos hasta que "T = 200". Pero el signo de igual también puede aparecer en enunciados tales como X = X + 1. Si este enunciado se encontrara en una ecuación algebraica, no tendría solución. Pero no es una ecuación algebraica; es un enunciado de asignación. Si se piensa en X como un lugar de almacenamiento, el enunciado X = X + 1 asignaría a X una unidad más que el valor anterior guardado en ese lugar.

Ejemplo 1

Determinar el valor final de X en el segmento de programa

```
X = 3
X = X + 4
```

Solución

El primer enunciado asigna a X el valor 3. El segundo enunciado reemplaza el valor de X por 3 + 4. Así, el valor final de X es 7.

Ejemplo 2

Determinar el valor final de X en el segmento de programa

```
X = 3
X = X * X
```

Solución

El primer enunciado asigna a X el valor 3. El segundo enunciado reemplaza el valor de X por 3 * 3 o 9.

El uso doble del signo de igual puede causar cierta confusión en los programadores principiantes. En algunos lenguajes de uso común se hace la diferencia entre los dos tipos de "iguales" al escribir un programa. Por ejemplo, el Pascal utiliza el símbolo := para el enunciado de asignación. Se escribiría X := X + 1. Muchas versiones de BASIC requieren el uso de la partícula LET como parte de un enunciado de

asignación. Se escribiría LET X = X + 1. Incluso en las versiones en las que el LET es opcional, es una buena práctica de programación usarlo para enfatizar el carácter de asignación del signo de igual.

Cuando se codifica el algoritmo de la sección 4.3, se necesitan el signo de igual y el enunciado de asignación. Se muestra en Pascal y en BASIC.

```
PROGRAM UM:                          10 REM PROGRAM SUM
VAR X: R AL; N: INTEGER;
BEGIN
  X := 0;                            20 LET X = 0
  FOR N := 1 TO 10 DO                30 FOR N = 1 TO 10
    X := X + 0.1;                    40 LET X = X + 0.1
                                       50 NEXT N

  IF X = 1
    THEN WRITELN ('ONE')             60 IF X = 1 THEN PRINT "ONE"
    ELSE WRITELN ('NOT ONE')         70 IF X <> 1 THEN PRINT "NOT ONE"
END.                                 80 END
```

El primer enunciado en negrita asigna a X el valor 0. El segundo enunciado en negrita indica que el paso siguiente se repetirá 10 veces. Es decir, a N se le asignarán los valores enteros del 1 al 10 sucesivamente. Cuando a N se le asigna el valor 1, a X se le asigna el valor 0 + 0.1. Cuando a N se le asigna el valor 2, a X se le asigna el valor 0.1 + 0.1 = 0.2. Cuando a N se le asigna el valor 3, a X se le asigna el valor 0.2 + 0.1 = 0.3. El proceso se repite hasta que 0.1 se ha sumado 10 veces. El signo de igual usado en el enunciado IF...THEN no es un enunciado de asignación. Obliga a que la computadora investigue el valor almacenado en la posición X antes de ejecutar la siguiente acción. Sin embargo, no cambia ese valor.

Cuando un programa de computadora no produce los resultados esperados, encontrar el error puede ser difícil. En ocasiones es útil determinar los valores que recibe cada variable cuando el programa se ejecuta. En la sección 1.1 se aprendió que al hecho de examinar un programa paso a paso se le llama "revisión de rastreo de valores" del programa.

Para determinar el valor final de las variables de un segmento de programa:

1. Se enlistan las variables en un renglón.
2. Tomando los enunciados de asignación sucesivamente, se escribe el valor de cada variable abajo de la misma. Se tacha el valor anterior para indicar que se ha sustituido.

Ejemplo 3

Determinar el valor final de las variables del segmento de programa.

```
A = 1
B = A
A = A + B
```

Solución

Tomando los enunciados *en orden*, se asigna a cada variable el valor dado. Al enlistar estos valores en forma de tabla se tiene:

A	B
~~1~~ (A = 1)	1 (B = A)
2 (A = A + B)	

Por tanto, se tiene A = 2 como el valor final de A y B = 1 como el valor final de B.

Ejemplo 4

Determinar el valor final de las variables del segmento de programa.

```
A = 2
B = 3
C = A
A = B
B = C
```

Solución

A	B	C
~~2~~ 3	~~3~~ 2	2

Por tanto, se tiene A = 3, B = 2 y C = 2.

En la sección 3.6 se introdujo el enunciado IF... THEN. Recuérdese que la estructura de decisión con una sola alternativa asume la forma IF (condición) THEN (acción), mientras que la esctructura de decisión con dos alternativas asume la forma IF (condición) THEN (acción 1) ELSE (acción 2). La asignación de un valor a una variable es una de las acciones posibles que pueden presentarse en una estructura de decisión.

Ejemplo 5

Determinar el valor final de las variables del segmento de programa.

```
A = 1
B = 2
IF (A + B = 3) THEN A = 2
```

Solución

El primer enunciado asigna el valor 1 a A. El segundo enunciado asigna el valor 2 a B. Puesto que A + B = 1 + 2 = 3, la condición es verdadera, por lo que la acción se ejecutará. Es decir, el valor 2 se asignará a A. Se escribiría:

A	B
✗ 2	2

Por tanto, se tiene A = 2 y B = 2.

Ejemplo 6

Determinar el valor final de las variables del segmento de programa.

```
A = 1
B = 2
IF (A + B = 5) THEN B = 5
```

Solución

El primer enunciado asigna el valor 1 a A. El segundo enunciado asigna el valor 2 a B. Puesto que A + B = 1 + 2 ≠ 5, la acción no se ejecutará. Es decir, el valor 5 *no* se asignará a B. B conservará su valor en curso. Se escribiría:

A	B
1	2

Por tanto, se tiene A = 1 y B = 2.

Ejercicios

Determinar el valor final de las variables de los segmentos de programa. Ver los ejemplos 1 y 2.

1.
```
X = 2
X = X + 3
```

2.
```
Y = 5
Y = Y − 1
```

3.
```
TC = 0
TC = TC + 10
```

4.
```
SUM = 0
SUM = SUM + 5
```

Determinar el valor final de las variables de los segmentos de programa. Ver los ejemplos 3 y 4.

5.
```
X = 4
Y = X
X = Y
```

6.
```
A = 1
B = 2
A = A + B
```

7. A = 2
   B = 3
   B = A + B

8. X = 1
   Y = 2
   X = Y
   Y = X

9. X = 3
   Y = 2
   X = Y
   Y = X

10. X = 1
    Y = 2
    Z = X
    X = Y
    Y = Z

11. A = 4
    B = 5
    C = A
    A = B
    B = C

Determinar el valor final de las variables de los segmentos de programa. Ver los ejemplos 5 y 6.

12. X = 2
    Y = 3
    IF (X + Y = 5) THEN X = 3

13. A = 2
    B = 3
    IF (A + B = 4) THEN A = 3

14. X = 1
    Y = 2
    IF (X = Y) THEN Y = X
    X = Y.

15. X = − 1
    Y = 4
    IF (X + Y = 2) THEN X = 3

16. P = 3
    Q = P
    IF (Q = 3) THEN P = 5

17. A = 5
    B = 3
    C = A + B
    IF (C = 2) THEN A = 2
    B = 4

18. X = − 6
    Y = − 3
    Z = X − Y
    IF (Z = − 3) THEN X = 6
    Y = 3

Revisión de capítulo

Una ecuación lineal con la variable x es aquella que puede ponerse en la forma _____ donde a y $b \in R$ y $a \neq 0$.

Se dice que el valor de una variable _____ de la ecuación cuando la hace verdadera, y se le llama la _____ de la ecuación.

Una ecuación cuadrática con la variable x es aquella que puede ponerse en la forma _____ donde a, b y c son números rea-

les y $a \neq 0$. A esta forma de la ecuación se le llama _____.

La propiedad especial del cero establece que si a y b son números reales, tales que $ab = 0$, entonces _____ o _____.

En una ecuación cuadrática en forma normal las soluciones están dadas por $x =$ _____.

Una expresión de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, con a, b, c y $d \in R$ y $a \neq 0$, se llama ecuación _____.

Una expresión de la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, con a, b, c, d y $e \in R$ y $a \neq 0$, se le llama ecuación _____.

Prueba de capítulo

Resolver las ecuaciones siguientes.

1. $3x - 2 = 7$
2. $\frac{P}{5} + 1 = 11$
3. $2(z + 3) + 1 = -z + 4$
4. $3x - (x + 1) = 4(x - 1) + 1$

Resolver las desigualdades siguientes.

5. $2y - 1 \leqslant 5$
6. $3x + 1 > 5x + 3$

Resolver las fórmulas siguientes para la variable que se indica.

7. $D = R \cdot T$ para R
8. $A = L \cdot W$ para W
9. $F = \frac{9C}{5} + 32$ para C
10. $L = a + (n - 1)d$ para a
11. $L = a + (n - 1)d$ para d
12. $S = \frac{a}{1 - r}$ para a
13. Si la tasa de interés es del 9 por ciento anual, ¿qué cantidad debe depositarse ahora para tener un total (capital + intereses) de $32 700 en un año?
14. Doce litros de una solución ácida tienen una concentración del 4 por ciento. ¿Cuántos litros de una solución ácida al 1 por ciento deben agregarse para obtener una solución al 3 por ciento?
15. Dos automóviles, separados por 210 km, se desplazan acercándose de modo que se encontrarán al cabo de dos horas. Si se sabe que uno de ellos viaja 5 km/h más rápido que el otro, encontrar sus velocidades.

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización.

16. $x^2 - 15x + 14 = 0$
17. $y^2 - 10y + 21 = 0$
18. $2x^2 + 7x + 5 = 0$
19. $x^2 + 4x = 5$
20. $z^2 = 2z + 15$

Usar la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones siguientes.

21. $x^2 + 5x + 3 = 0$
22. $y^2 + 2y - 1 = 0$
23. $2z^2 - 3z - 2 = 0$
24. $2x^2 = 4x - 1$
25. $3p^2 - 2p = 2$

Resolver las ecuaciones siguientes por factorización.

26. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
27. $2x^3 + 2x^2 - 4x = 0$
28. $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$

Usar el método de bisección para encontrar una solución (redondeada a centésimos) de las ecuaciones siguientes.

29. $x^3 - 25 = 0$ entre 2 y 3
30. $x^3 - 29 = 0$ entre 3 y 4

Resolver las ecuaciones siguientes.

31. $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = 1$
32. $\frac{2}{a} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$
33. $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} = \frac{2x+1}{x^2+x-6}$
34. $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3} = \frac{x^2+3x-5}{x^2+x-6}$
35. $\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{x^2+3x-6}{x^2-9}$

Determinar el valor final de las variables de los segmentos de programas.

36.
```
A = 2
B = 3*A
```

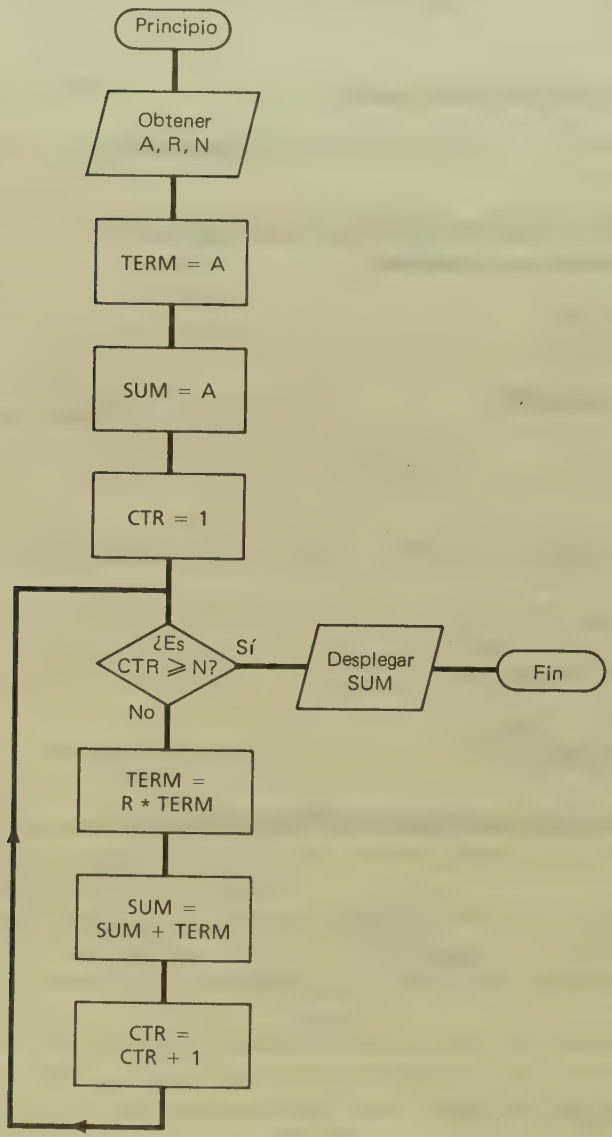
37.
```
B = 6
B = B + 3
```

38.
```
A = 2
B = 3*A
A = 3*B
```

39.
```
X = 1
Y = X + 3
Z = X*Y
```

40.
```
X = 2
Y = 2*X
IF (Y = X*X) THEN (X = Y*Y)
```

41. Una serie geométrica es una suma en la que cada término, después del primero (a), se obtiene multiplicando el término anterior por una constante fija (r). El diagrama de flujo siguiente indica un algoritmo para calcular la suma de una serie geométrica con n términos. Modificarlo de tal modo que sólo presente la suma si $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = (a - ar^n)/(1 - r)$.



BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

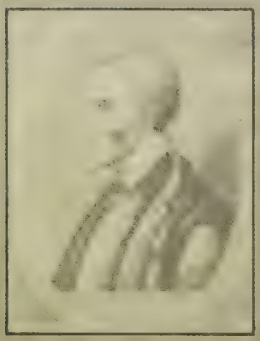
Kimberling, Clark. "Roots: Half-Interval Search", *The Mathematics Teacher*, Vol. 78 No. 2 (Febrero 1985), 120-123. (Programa en BASIC para calcular raíces de funciones polinómicas.)

Kroopnick, Allen. "How Good is the 'Rule of 72'?," *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 10 No. 4 (Septiembre 1979), 279-280.

Rothman, Tony. "Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois," *The American Mathematical Monthly*, Vol. 89 No. 2 (Febrero 1982), 84-106.

Todd, Aaron R. "The Quadratic Equation and Inexactness of Computation," *The MATYC Journal*, Vol. 10 No. 3 (Otoño 1976), 186-187.

Biografía — Girolamo Cardano



Girolamo Cardano nació en Italia el 24 de septiembre de 1501. Su padre fue un abogado amigo de Leonardo da Vinci. Cardano estudió medicina, pero daba pláticas de matemáticas, astronomía y griego. En 1531 contrajo matrimonio con Lucía Bandareni. Se dice que tenía un carácter tan violento que en un momento de ira le cortó las orejas al menor de sus hijos.

En aquella época se acostumbraba mantener en secreto los descubrimientos matemáticos para usarlos en concursos públicos, cuyos ganadores obtenían prestigio y premios monetarios. Alrededor de 1515, Scipio del Ferro descubrió cómo resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + bx = c$. Antes de morir le enseñó el método a su yerno, Annibale della Nave, y a su discípulo Antonio María Fior. En 1535 Fior se enteró de que Nicolo Fontana (llamado Tartaglia) podía resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + bx^2 = c$ y lo retó a un concurso. Cada uno debía presentar 30 problemas al otro. El ganador sería quien resolviera la mayor cantidad de problemas en 30 días. Tartaglia resolvió todos los problemas de Fior, pero éste no pudo resolver ninguno de los de Tartaglia.

Cardano quedó muy impresionado y persuadió a Tartaglia para que le revelara su método, con la promesa de no divulgarlo. En 1542, cuando recibió el método de Scipio de manos de Annibale della Nave, Cardano dejó de sentirse obligado por su promesa. Publicó la solución en 1545. Cardano le dio crédito a Tartaglia, pero el procedimiento se sigue conociendo hasta la fecha como "método de Cardano".

El hijo mayor de Cardano fue ejecutado en 1560 por envenenar a su esposa después de que ésta alardeara de que ninguno de sus hijos tenía parentesco con su esposo. Esto afectó el trabajo de Cardano y se entregó a los juegos de azar. Más tarde escribió sobre las matemáticas del azar. En 1570 fue arrestado por hacer un horóscopo de Cristo y se le prohibió dar pláticas y publicar. Según la leyenda predijo su muerte para determinado día de 1576 y cuando éste llegó, Cardano se suicidó a fin de que se cumpliera su predicción.

7

Funciones

El monitor de una computadora presenta imágenes formadas de pequeños puntos llamados pixels. Para identificar los pixels individuales se usa un sistema de coordenadas similar al que se emplea para graficar funciones matemáticas.

7.1. FUNCIONES

El concepto de función es uno de los más importantes dentro de las matemáticas.

Definición

Una *función* es una correspondencia entre dos conjuntos tales que existe exactamente un elemento del segundo conjunto asociado con cada elemento del primero. Al primer conjunto se le llama *dominio* y al segundo *rango.*

Una manera de indicar una función es construyendo una tabla. Los elementos del dominio se enlistan en la columna de la izquierda y los elementos correspondientes del rango en la columna de la derecha. Por ejemplo, considérense los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

La tabla siguiente muestra una función.

A	B
1	2
3	4
5	6
7	8

En este ejemplo el conjunto A es el dominio y el conjunto B es el rango. Para cada elemento del conjunto A hay exactamente un elemento del conjunto B que le corresponde.

Ejemplo 1

Determinar si para los dos conjuntos siguientes la correspondencia que se presenta en la tabla es una función. De serlo, establecer el dominio y el rango.

A	B
2	1
4	3
6	5
8	7

Solución

La correspondencia es una función. Para cada elemento del conjunto A hay exactamente un elemento en B que le corresponde. El dominio es $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y el rango es $B = \{1, 3, 5, 7\}$.

Ejemplo 2

Determinar si para los dos conjuntos dados la correspondencia que se presenta en la tabla es una función. De serlo, establecer el dominio y el rango.

A	B
1	-1
0	0
1	1
4	2

Solución

La tabla no representa una función, ya que si se elige el elemento 1 del conjunto A, tanto el -1 como el 1 del conjunto B se asocian con él. La definición de función requiere que cada elemento del conjunto A corresponda exactamente con un elemento del conjunto B.

Ejemplo 3

Determinar si para los dos conjuntos dados la correspondencia que se presenta en la tabla es una función. De serlo, establecer el dominio y el rango.

X	Y
-1	1
0	0
1	1
2	4

Solución

La tabla representa una función, ya que para cada elemento del conjunto X hay exactamente un elemento del conjunto Y que se asocia con él. Por ejemplo, si se examina -1, el único número con el que se asocia es 1. Si se examina 1, el único número con el que se asocia es 1, y así sucesivamente. El dominio es $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ y el rango $Y = \{0, 1, 4\}$.

En algunos casos, los conjuntos contienen tal cantidad de valores que no es conveniente, o incluso posible, enlistarlos todos. Entonces se usa una ecuación. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x". La letra f representa la función, y al número entre paréntesis se llama el *argumento* de la función. En ocasiones, los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra piensan que $f(x)$ es la variable f multiplicada por la variable x, pero debe ser claro, por el contexto del problema, si $f(x)$ es un problema de multiplicación o el valor de una función.

El enunciado $f(x) = x^2 + 1$ especifica una función que relaciona un dominio (cuyos elementos pueden sustituirse en lugar de x) y un rango (cuyos elementos sustituirán a $f(x)$). Si el dominio es $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$, entonces se tendrá

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$
$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$
$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

y así sucesivamente.

Definición

$f(x)$ es el elemento del rango asociado con el elemento x del dominio bajo la función f. Para encontrar $f(a)$ para un número real a, se sustituye x por a y se evalúa la expresión resultante.

Ejemplo 4

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$. Evaluar las expresiones siguientes:

(a) $f(3)$
(b) $g(3)$
(c) $f(-3)$

Solución

(a) $f(3) = 3^2 = 9$
(b) $g(3) = 2(3) = 6$
(c) $f(-3) = (-3)^2 = 9$

Ejemplo 5

Sean $f(x) = (x - 1)^2$ y $g(x) = x^2 - 1$. Evaluar las expresiones siguientes:

(a) $f(-2)$
(b) $-f(2)$
(c) $g(-2)$

Solución

(a) $f(-2) = (-2 - 1)^2 = (-3)^2 = 9$
(b) $-f(2) = -(2 - 1)^2 = -1^2 = -1$
(c) $g(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Ejemplo 6

Sean $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$. Evaluar las expresiones siguientes:

(a) $f(2) + g(2)$
(b) $f(2) + f(3)$
(c) $f(2) + g(3)$

Solución

(a) $f(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$, y $g(2) = 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8$
Por lo tanto, $f(2) + g(2) = 7 + 8 = 15$.
(b) $f(2) = 7$ y $f(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$
Por lo tanto, $f(2) + f(3) = 7 + 9 = 16$.
(c) $f(2) = 7$ y $g(3) = 3(3) + 2 = 9 + 2 = 11$
Por lo tanto, $f(2) + g(3) = 7 + 11 = 18$.

Cuando no se especifica el dominio, se sobreentiende que éste es el conjunto de todos los números reales para los que la función está definida. Recuérdese que una expresión que tiene denominador cero o la raíz cuadrada de un número negativo no están definidas en el sistema de los números reales.

Para determinar el dominio de una función:

1. El dominio es el conjunto de los números reales para los que la función está definida. Se empieza con el conjunto de los números reales.
2. Si la función tiene denominadores, se descartan los valores para los que éstos son cero.
3. Si la función tiene raíces cuadradas (o cualquier otra raíz par), se descartan los valores para los que las expresiones dentro del radical sean negativas.

Ejemplo 7

Determinar si la ecuación $g(x) = 1/(2x + 3)$ representa una función y, de serlo, establecer el dominio.

Solución

$g(x) = 1/(2x + 3)$ es una función, ya que siempre que se sustituye x por un valor, la ecuación da un solo valor. El dominio es el conjunto de los números reales, con excepción de aquellos valores para los que el denominador sea cero. Dado que cuando $x = -3/2$, $2x + 3 = 0$ la función no está definida para $x = -3/2$. El dominio se escribe en notación de conjuntos como $\{x | x \in R, x \neq -3/2\}$.

Ejemplo 8

Determinar si la ecuación $k(x) = x^3$ representa una función y, de serlo, establecer el dominio.

Solución

$k(x) = x^3$ es una función, ya que siempre que se sustituye x por un valor, la ecuación da un solo valor. El dominio es el conjunto de los números reales, R.

Ejemplo 9

Determinar si la ecuación $f(x) = \sqrt{x - 1}$ representa una función y, de serlo, establecer el dominio.

Solución

$f(x) = \sqrt{x - 1}$ es una función, ya que siempre que se sustituye x por un valor, la ecuación da un solo valor. Recuérdese que el símbolo $\sqrt{\ }$ indica únicamente la raíz cuadrada positiva. El dominio es $\{x \mid x \in R, x \geqslant 1\}$, ya que la expresión que está dentro del radical, $x - 1$, debe ser mayor o igual que cero.

Puesto que x puede asumir cualquier valor del dominio, con frecuencia se le llama la *variable independiente* de la función f definida por $y = f(x)$. El valor $f(x)$ depende del valor de x, por lo que se le llama la variable *dependiente*. En la fórmula del perímetro de un rectángulo ($P = 2l + 2a$), el perímetro depende tanto del largo como del ancho. Podría decirse que "el perímetro es una función del largo y el ancho", y escribirse $P = f(l, a) = 2l + 2a$. Sin embargo, en este capítulo sólo se tratan funciones con una variable.

Ejercicios

Determinar si las correspondencias que se presentan en las tablas siguientes son funciones. Ver los ejemplos 1 al 3.

1.

X	Y
−2	6
3	−9
−4	12
5	−15

2.

X	Y
2	3
2	1
4	5
4	3

3.

X	Y
−2	3
−3	3
−4	3
−5	3

4.

X	Y
2	2
3	3
−1	−1
0	0

5.

X	Y
2	−2
3	−3
4	−4
5	−5

6.

X	Y
1	1
2	4
3	9

7.

X	Y
1	1
4	2
9	3

8.

X	Y
4	2
4	−2
9	3
9	−3

9.

X	Y
1	4
1	3
2	2
3	1

10.

X	Y
4	1
3	1
2	2
1	3

Evaluar las expresiones siguientes si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 2$. Ver los ejemplos 4 al 6.

11. $f(1)$ **12.** $f(0)$ **13.** $f(-1)$
14. $f(-2)$ **15.** $g(1)$ **16.** $g(0)$
17. $g(-1)$ **18.** $g(-2)$ **19.** $f(3) + g(3)$
20. $f(4) - g(4)$ **21.** $f(-3) + g(-3)$ **22.** $f(5) - f(3)$
23. $g(4) - g(2)$ **24.** $f(1) + g(-1)$ **25.** $f(-1) + g(1)$

Determinar si para las ecuaciones siguientes la correspondencia es una función. Si lo es, especificar el dominio. Ver los ejemplos 7 al 9.

26. $f(x) = 2x + 1$ **27.** $f(x) = 3x \pm 2$

28. $f(x) = x^2 - 3$ **29.** $g(x) = \dfrac{x + 4}{x - 1}$

30. $g(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

31. $k(x) = \sqrt{x-4}$

32. $k(x) = \sqrt{2x-1}$

33. $f(x) = x^2$

34. $g(x) = x^3$

35. $k(x) = x^4$

36. $h(x) = \dfrac{\pm\sqrt{x-3}}{x^2+1}$

***37.** La composición de las funciones f y g se denota por $f \circ g(x) = f(g(x))$. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 3$, encontrar

(a) $f \circ g(x)$
(b) $g \circ f(x)$

***38.** La correspondencia denotada por $f^{-1}(x)$ es la función inversa de $f(x)$ si $f \circ f^{-1}(x) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}, y $f^{-1} \circ f(x) = x$ para cada par de funciones, determinar si $g(x) = f^{-1}(x)$.

(a) $f(x) = x + 1$ $\quad g(x) = x - 1$
(b) $f(x) = x/2$ $\quad g(x) = 2x$
(c) $f(x) = 2x - 1$ $\quad g(x) = 2x + 1$
(d) $f(x) = 2x - 1$ $\quad g(x) = (x + 1)/2$
(e) $f(x) = 2x - 1$ $\quad g(x) = x - 2$

***39.** Es posible encontrar la función inversa (cuando existe) intercambiando x y y en la ecuación. Así, $y = 3x + 1$ se convierte en $x = 3y + 1$ o $y = (x - 1)/3$. Encontrar la inversa de las funciones siguientes:

(a) $y = x - 4$
(b) $y = 3x$
(c) $y = \sqrt{x}$ para $x \geqslant 0$

***40.** ¿Es la función inversa siempre una función?

***41.** ¿Qué tienen en común las funciones siguientes?

(a) $f(n) = n^2 - n + 41$, cuyo dominio es el conjunto de los enteros mayores o iguales que 1 y menores que 32.
(b) $g(n) = n^2 - 79n + 1601$, cuyo dominio es el conjunto de los enteros mayores o iguales que 40 y menores que 71.

***42.** Alguna vez se pensó (equivocadamente) que la función f definida por $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$ sólo producía números primos para los valores enteros de n. A tales números se les conoce como *primos de Fermat.* Encontrar el mayor número de primos que sea posible.

7.2. GRAFICACIÓN

La relación entre las variables independiente y dependiente de una función con frecuencia se pone de manifiesto en una gráfica. Se

usa una recta horizontal, llamada eje x, para localizar la variable independiente, y una vertical, llamada eje y, para localizar la variable dependiente (ver figura 7.1). Al punto de intersección de ambas rectas se le llama *origen*. Al graficar funciones, la variable $f(x)$ suele reemplazarse por la variable y, de modo que en lugar de $f(x) = x^2 - 1$, se escribiría $y = x^2 - 1$.

Figura 7.1

Los dos ejes dividen el plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*, los cuales suelen numerarse con números romanos empezando con el que está en la parte superior derecha y prosiguiendo en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (ver figura 7.2). A este sistema se le llama *de coordenadas rectangulares* o *de coordenadas cartesianas*, en honor de René Descartes. Cada eje se marca con segmentos de igual longitud para indicar los enteros, con el 0 en el origen de ambos ejes. Con frecuencia se usa la misma escala en ambos ejes.

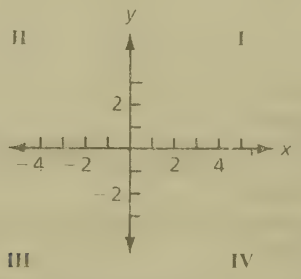


Figura 7.2

En una función, cada elemento x del dominio se asocia con un elemento único y del rango. Por ejemplo, $f(2) = 3$ significa que cuando $x = 2$, se tiene $f(2)$ o $y = 3$. Este punto se denota utilizando paréntesis (2, 3) y se le llama *par ordenado*. Siempre se anota primero el valor de la variable independiente. Estos valores se conocen como las *coordenadas* del punto y determinan un punto único en el plano. Por ejemplo, el punto (2, 3) se localiza donde se cortan la

recta vertical que pasa por $x = 2$ (en el eje x) y la horizontal que pasa por $y = 3$ (en el eje y). *Graficar* un punto en el plano significa indicar su localización por medio de un círculo lleno. En la figura 7.3 se grafica el punto (2, 3) en el plano.

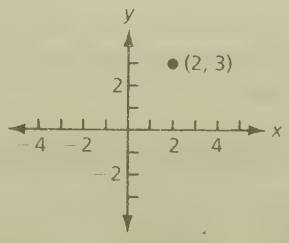


Figura 7.3

Para graficar una función se localiza el conjunto de pares ordenados (x, y), donde x pertenece al dominio y y es el valor del rango asociado con x.

Para trazar la gráfica de una función dada por $y = f(x)$:

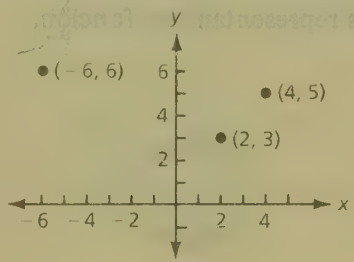
1. Se trazan e identifican los ejes x y y.
2. Se indica la escala en cada eje.
3. Se localizan todos los pares (x, y) en el mismo sistema de coordenadas.

Ejemplo 1

Graficar la función indicada por la tabla siguiente:

x	y
2	3
4	5
−6	6

Solución

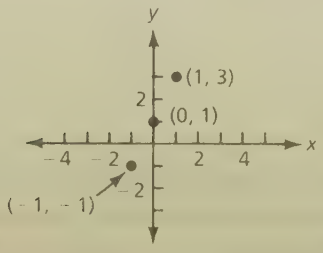


Ejemplo 2

Graficar la función indicada por la tabla siguiente:

x	y
-1	-1
0	1
1	3

Solución



Si el dominio es el conjunto de los números reales, entonces cada valor de x en el eje x tendrá un valor y asociado con él, y la gráfica será una serie de puntos. Sin embargo, no toda gráfica corresponde a una función. Puesto que la definición de función requiere que un solo valor de y esté asociado con cada valor de x, cualquier recta vertical del plano intersecará la gráfica de una función una sola vez. Si la gráfica no corresponde a una función, es posible colocar una recta vertical en algún lugar del plano de tal modo que la recta corte a la gráfica en más de un punto.

Para determinar si una gráfica representa una función:

1. Si no es posible trazar una recta vertical en el plano que corte la gráfica más de una vez, entonces representa una función.
2. Si es posible trazar una recta vertical (en cualquier lugar del plano) que corte la gráfica más de una vez, entonces no representa una función.

Ejemplo 3

Determinar si las gráficas siguientes representan una función.

(a)

(b)

Solución

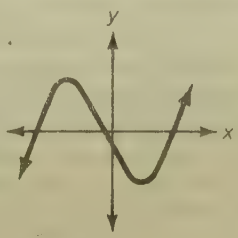
(a) La gráfica del ejemplo 3(a) representa una función porque una recta vertical trazada en cualquier parte del plano corta la gráfica una sola vez.
(b) La gráfica del ejemplo 3(b) no representa una función porque puede trazarse una recta vertical tal que corte la gráfica en más de un punto. Por ejemplo, el eje y corta la gráfica en dos puntos.

Ejemplo 4

Determinar si las gráficas siguientes representan una función.

(a)

(b)



Solución

(a) La gráfica del ejemplo 4(a) no representa una función porque puede trazarse una recta vertical tal que corte la gráfica en más de un punto.
(b) La gráfica del ejemplo 4(b) representa una función porque no obstante el lugar en que se trace una recta vertical, ésta cortará la gráfica una sola vez.

Ejercicios

Graficar las funciones siguientes en un plano. Ver los ejemplos 1 y 2.

1.

x	y
−2	6
3	−9
−4	12

2.

x	y
−2	3
−3	3
−4	3
−5	3

3.

x	y
2	2
3	3
−1	−1
0	0

4.

x	y
2	−2
3	−3
4	−4
5	−5

5.

x	y
1	1
2	4
3	9

6.

x	y
1	1
4	2
9	3

7.

x	y
1	1
0	0
1	−1

8.

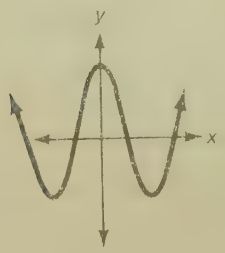
x	y
−2	4
0	−1
2	4

9.

x	y
−2	7
−1	0
0	−1
1	0

Determinar si las gráficas siguientes representan una función. Ver los ejemplos 3. y 4.

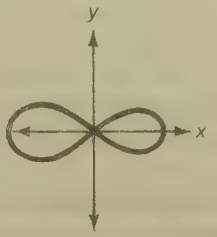
10.



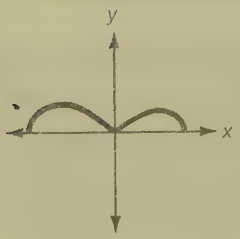
11.

12.

13.



14.

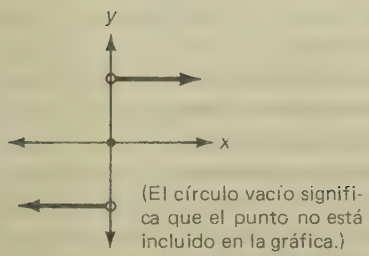


15.

16.

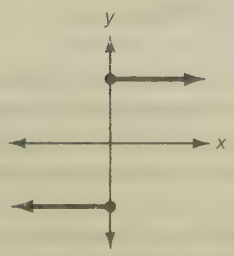
17.

18.



(El círculo vacío significa que el punto no está incluido en la gráfica.)

19.



*20. En artículos de diarios y revistas suelen aparecer gráficas de funciones. por ejemplo, el eje horizontal puede indicar años mientras que el vertical, el déficit federal. Encontrar tres gráficas de funciones en periódicos comunes e identificar las variables independientes y dependientes.

*21. El código ASCII consta de 95 símbolos o caracteres que pueden imprimirse, así como de algunos símbolos de comunicación empleados por muchas microcomputadoras que no pueden imprimirse. El carácter 65 del conjunto es A, al que siguen las demás letras del alfabeto en ese orden. Considérese la función de las computadoras que regresa el carácter de la posición N del conjunto de caracteres ASCII. Esta función se denota generalmente por CHR(N) en Pascal y por CHR$(N) en BASIC. Encontrar:

(a) CHR(69 o CHR$(69)
(b) CHR (72) o CHR$(72)
(c) CHR(84) o CHR$(84)
(d) CHR(89) o CHR$(89)

*22. A los números dispuestos como se indica a continuación se les conoce como *triángulo de Pascal*. Cada número (excepto el 1) es la suma de los dos que están arriba de él. Escribir una función que asocie la suma de los números de un renglón con el número que le corresponda a cada renglón (si el 1 superior está en el renglón 0).

```
                    1
                  1   1
                1   2   1
              1   3   3   1
            1   4   6   4   1
          1   5   10  10  5   1
        1   6   15  20  15  6   1
```

*23. ¿Es posible trazar líneas oblicuas en el triángulo tales que la suma asociada con cada recta sea uno de los números de Fibonacci $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$?

7.3. FUNCIONES LINEALES

En la sección anterior se trataron algunas gráficas de funciones con sólo algunos valores en el dominio. Si éste es el conjunto de los números reales, es imposible enlistar todos los pares ordenados. Sin embargo, es posible encontrar un patrón si se examina una muestra de valores.

Cuando los puntos se localizan en una recta, se traza la recta que une estos puntos para graficar los valores restantes de la función. A este tipo de función se le llama *lineal.*

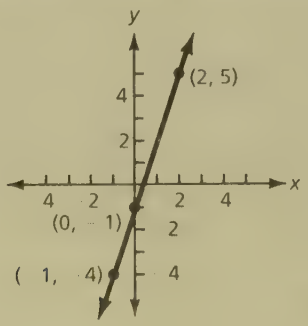
Es sencillo identificar la gráfica de una función lineal. Cualquier función que se ajuste al patrón $f(x) = mx + b$ (o $y = mx + b$), donde m y b son números reales, es lineal. Puesto que una recta está determinada por dos puntos, no es necesario localizar un gran número de puntos para trazar la gráfica. No obstante, se recomienda localizar, por lo menos, tres puntos. Si se sabe que la función es lineal, pero los puntos no quedan en una recta, se sabrá entonces que se ha cometido un error, el cual podrá encontrarse y corregirse.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de $y = 3x - 1$.

Solución

Se escogen tres valores de x, digamos -1, 0 y 2. Los valores correspondientes de y son $3(-1) - 1 = -4$, $3(0) - 1 = -1$ y $3(2) - 1 = 5$. Es decir, $(-1, -4)$, $(0, -1)$ y $(2, 5)$ son tres de los puntos de la gráfica. Se localizan estos tres puntos y se unen para encontrar todos los puntos de la función.



■

Los números m y b de la ecuación $y = mx + b$ proporcionan importante información acerca de la gráfica de esta función. Cuando $x = 0$, $y = b$, de modo que la recta corta el eje y en el punto $(0, b)$, llamado *intersección con el eje y*. Se acostumbra llamar *ordenada al origen* al valor b y *pendiente* al valor m. Este último es una medida

de la inclinación de la recta. Entre mayor sea el valor absoluto de la pendiente, la recta se encontrará más próxima a la vertical; entre más cerca esté de cero, la recta será más horizontal. La pendiente se describe en ocasiones como "avance vertical/avance horizontal". Es decir, para llegar de un punto a otro de la recta podría avanzarse verticalmente y luego horizontalmente, en vez de moverse a lo largo de ella. La relación avance vertical/avance horizontal es constante para una recta dada.

Para trazar la gráfica de una función lineal puede usarse la pendiente y la ordenada al origen.

Para trazar la gráfica de un función lineal dada por $y = mx + b$

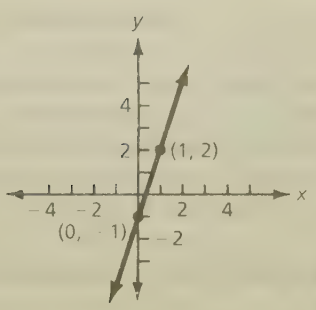
1. Se identifica la pendiente (m) y la ordenada al origen (b). Se escribe la pendiente m en forma de fracción.
2. Se localiza la ordenada al origen en $(0, b)$. A partir de este punto:
   (a) Se usa el numerador de la pendiente (avance horizontal) para contar hacia arriba (si es positiva) o hacia abajo (si es negativa).
   (b) Se usa el denominador de la pendiente (avance horizontal) para contar a la derecha (si es positiva) o a la izquierda (si es negativa).
3. Se traza un segundo punto en la posición encontrada en el paso 2.
4. Se unen los dos puntos para graficar los valores restantes de la función.

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de $y = 3x - 1$.

Solución

1. La pendiente es 3 o 3/1, expresada como fracción, y la ordenada al origen es -1.
2. Se localiza la intersección con el eje y en $(0, -1)$. A partir de ese punto, se cuentan tres unidades hacia arriba y una a la derecha para obtener a $(1, 2)$.
3. Se localiza el punto $(1, 2)$.
4. Se unen $(0, -1)$ y $(1, 2)$.



Ejemplo 3

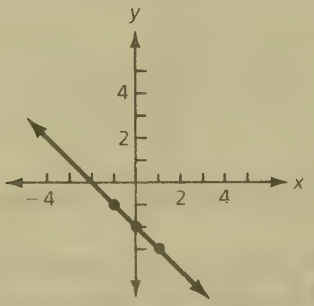
Trazar la gráfica de $y = -x - 2$.

Solución

1. La pendiente es -1 o $-1/1$ y la ordenada al origen es -2.
2. La intersección con el eje y está en $(0, -2)$. A partir de ese punto se cuenta una unidad hacia abajo y una hacia la derecha para obtener $(1, -3)$.
3. Se localiza el punto $(1, -3)$.
4. Se unen los dos puntos.

Solución alternativa

1. La pendiente es -1 y la ordenada al origen es -2.
2. El signo negativo de la pendiente puede asignarse al numerador o al denominador. Si se coloca en el denominador $(1/-1)$, se contaría una unidad hacia arriba y una a la izquierda para obtener $(-1, -1)$.
3. Se localiza el punto $(-1, -1)$.
4. Se unen los dos puntos.

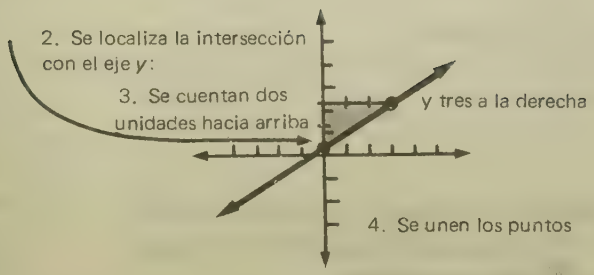


Ejemplo 4

Trazar la gráfica de $y = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$.

Solución

1. $m = 2/3$, $b = 1/3$

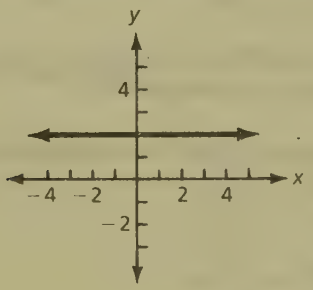


Ejemplo 5

Trazar la gráfica de $y = 2$.

Solución

Puesto que no hay ningún término en x, debe tenerse $m = 0$ (i.e., $y = 0x + 2$). Una pendiente 0 indica una recta horizontal. La intersección con el eje y es 2. De hecho, para cualquier valor de x, el valor de y será 2. Ver la figura siguiente.



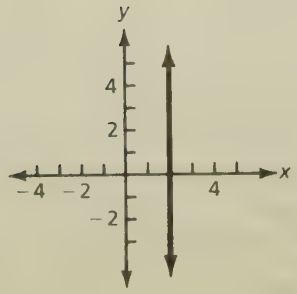
■

Ejemplo 6

Trazar la gráfica de $x = 2$.

Solución

La ecuación no puede escribirse en la forma $y = mx + b$. Es imposible cambiar el coeficiente de y de 0 a 1. Se dice que la pendiente no está definida. La gráfica será una recta vertical. Puesto que el valor $x = 2$ tiene un número infinito de valores de y asociado con él, la correspondencia no es una función. Para $x = 2$, el conjunto completo de los números reales se asocia con x. Ver la figura siguiente.



Las funciones lineales no siempre se escriben en la forma $y = mx + b$. Por ejemplo, $2x + 3y = 1$ no se ajusta a este patrón. Pero esta ecuación puede resolverse para y, de donde se obtiene

$$3y = -2x + 1, \text{ o } y = \frac{-2x + 1}{3} = \frac{-2x}{3} + \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 7

Identificar la pendiente y la ordenada al origen de la gráfica de $x - y = 4$.

Solución

Se resuelve la ecuación para y: $-y = -x + 4$

$$y = x - 4$$

Puesto que la ecuación está ahora en la forma $y = mx + b$, puede decirse que la pendiente es 1 y la ordenada al origen es -4.

Ejemplo 8

Identificar la pendiente y la ordenada al origen de la gráfica de $x - 2y = 3$.

Solución

Se resuelve la ecuación para y: $-2y = -x + 3$

$$y = \frac{-x + 3}{-2}$$

$$y = \frac{1x}{2} - \frac{3}{2}$$

Puesto que la ecuación está ahora en la forma $y = mx + b$, puede decirse que la pendiente es $\frac{1}{2}$ y que la ordenada al origen es $-\frac{3}{2}$ o $-1\frac{1}{2}$.

Ejercicios

Graficar las ecuaciones siguientes. Ver los ejemplos 2 al 6.

1. $y = 2x + 3$ **2.** $y = -x - 2$ **3.** $y = \frac{1}{2}x + 3$

4. $y = \frac{2}{3}x - 1$ **5.** $y = -\frac{3}{5}x + 4$ **6.** $y = 1$

7. $y = -1$ **8.** $x = -1$ **9.** $x = 1$

10. $y = -2$ **11.** $y = 2x$ **12.** $y = -x$

Identificar la pendiente y la ordenada al origen de las gráficas de las ecuaciones siguientes. Ver los ejemplos 7 al 8.

13. $y = 3x - 2$ **14.** $y = x + 3$ **15.** $y = -2x + 5$

16. $y = \frac{1}{2}x - 1$ **17.** $2x - y = 4$ **18.** $2x + 3y = 6$

19. $x = 2y + 1$ **20.** $3y = 2x - 6$ **21.** $3x - y = 7$

22. $4x - 5y = 3$ **23.** $x = 2y$ **24.** $y = 3$

25. $y = 4$ **26.** $x = -y$

Graficar las ecuaciones siguientes.

27. $x - y = 3$ **28.** $2x - 3y = 9$

28. $2y = 3x + 4$ **30.** $2y - x = 3$

31. $x - 2y = 4$ **32.** $2x - y = 3$

33. $x + y = 5$ **34.** $3x + y = -1$

35. $2x = 3$ **36.** $2y = 3$

***37.** (a) ¿Cuál es la relación entre las rectas que tienen la misma pendiente?
(b) ¿Cuál es la relación entre las rectas que tienen pendientes cuyo producto es -1?

***38.** (a) Graficar $y = x + 1$ y su función inversa $y = x - 1$.
(b) Graficar $y = 2x$ y su función inversa $y = \frac{x}{2}$.

***39.** (a) Graficar $y = 2x - 1$ y su función inversa.
(b) ¿Cómo podría describirse la gráfica de la inversa de una función?

***40.** Si una función está dada por $ax + by = c$, encontrar las fórmulas para las intersecciones con el eje x y el eje y, respectivamente.

7.4. FUNCIONES CUADRÁTICAS

En la sección 6.4 se estudiaron las *ecuaciones* cuadráticas. En esta sección se tratarán las *funciones* cuadráticas.

Definición

Una función *cuadrática* es aquella que puede escribirse en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (o $y = ax^2 + bx + c$), donde a, b y $c \in R$, $a \neq 0$.

Considérese la función dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$. El dominio es el conjunto de los números reales. La gráfica de esta función podría trazarse examinando algunos valores del dominio para encontrar los valores correspondientes en el rango. Por ejemplo, $f(0) = 0^2 - 5(0) + 6 = 6$, $f(1) = 1^2 - 5(1) + 6 = 2$, y $f(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$.

Es decir, (0, 6), (1, 2) y (2, 0) son puntos de la gráfica. Ver la figura 7.4.

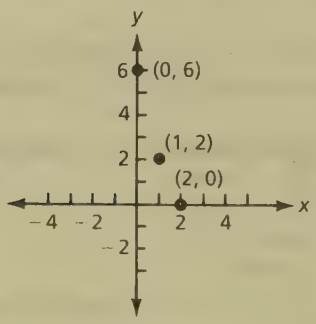


Figura 7.4

La graficación de una función cuadrática no es tan inmediata como la de una función lineal, debido a que los puntos no se localizan en una recta.

El hecho de saber la figura que se obtendrá hace que sea sencillo graficar una función lineal. Sin embargo, las funciones cuadráticas también siguen un patrón. A la gráfica de una función cuadrática se le llama *parábola*. Ver la figura 7.5.

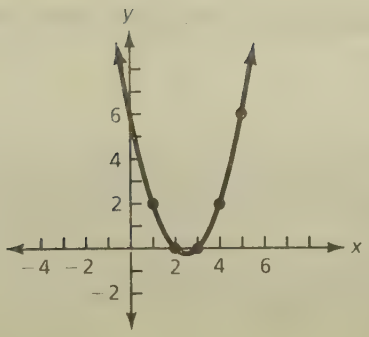


Figura 7.5

Dado que la parte de la izquierda es un reflejo de la derecha, se dice que la parábola es *simétrica*. Si $a > 0$ en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, la parábola abrirá hacia arriba y en ocasiones se llama parábola *cóncava*. Si $a < 0$, la parábola abrirá hacia abajo y en ocasiones se llama parábola *convexa*.

Si se conocen el *vértice* (por ejemplo, el punto más alto o más bajo de la parábola) y dos puntos más, se puede obtener un trazo razonablemente exacto de la gráfica uniendo los tres puntos para completar la parábola. La coordenada x del vértice está dada por $-b/(2a)$. Al sustituir este valor en lugar de x en la función, puede calcularse el valor de la coordenada y. Es fácil ver por qué con $-b/(2a)$ se localiza el centro de la parábola. Cuando la gráfica corta el eje x, la coordenada y es cero. Es decir, se tiene $ax^2 + bx + c = 0$. Pero ésta es la ecuación cuadrática que se vio en el capítulo 6. Tiene dos soluciones, que son $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Puesto que la parábola es simétrica, el centro está a la mitad de estos dos valores. Se promedian para encontrar el punto medio:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2b}{2a}\right) = \frac{-b}{2a}.$$

Para $f(x) = x^2 - 5x + 6$ el vértice está en $x = 5/2$.

Puesto que $f(5/2) = (5/2)^2 - 5(5/2) + 6 = 25/4 - 50/4 + 24/4 = -1/4$, se sabe que el vértice está en $(5/2, -1/4)$.

Una vez que se sabe en dónde está el vértice, pueden encontrarse dos puntos a ambos lados de él. Para el ejemplo anterior, podrían examinarse $x = 1$ y $x = 4$. Puesto que $f(1) = 1 - 5 + 6 = 2$ y $f(4) = 16 - 20 + 6 = 2$, se sabe que los puntos $(1, 2)$ y $(4, 2)$ están en la gráfica. (Ver la figura 7.5.)

El procedimiento para graficar una función cuadrática se resume a continuación.

Para trazar la gráfica de una función cuadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

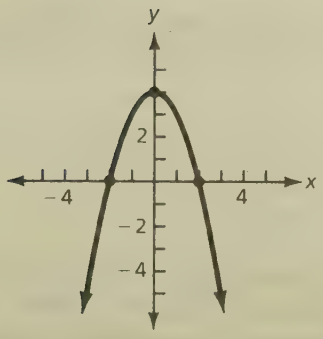
1. Se determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
   a. Si $a > 0$, abrirá hacia abajo.
   b. Si $a < 0$, abrirá hacia arriba.
2. Se localiza el vértice.
   a. Sea $x = -b/(2a)$.
   b. Encontrar $f(x)$.
3. Se escogen otros dos valores de x (uno a cada lado del vértice) y se encuentran los valores correspondientes de la función.
4. Se localizan los tres puntos y se unen para completar la parábola.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de $f(x)$ o $y = -x^2 + 4$.

Solución

1. En esta ecuación $a = -1$, $b = 0$ y $c = 4$. Puesto que $a = 1$, la parábola abrirá hacia abajo.
2. El vértice estará en $x = -0/-2 = 0$. Puesto que $f(0) = 4$, se sabe que el vértice está en $(0, 4)$.
3. Se escogen otros dos valores de x, uno a cada lado del vértice. Se usan 2 y -2. Puesto que $f(-2) = -(4) + 4 = 0$, se sabe que $(-2, 0)$ está en la gráfica. Puesto que $f(2) = -(4) + 4 = 0$, se sabe que $(2, 0)$ está en la gráfica.
4. Se localizan estos tres puntos y se unen con una línea para completar la parábola.



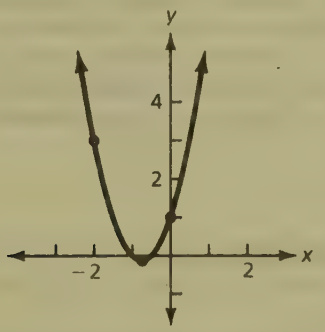
■

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de $f(x)$ o $y = 2x^2 + 3x + 1$.

Solución

1. En esta ecuación $a = 2$, $b = 3$ y $c = 1$. Puesto que $a = 2$, la parábola abrirá hacia arriba.
2. El vértice estará en $x = -3/(2 \cdot 2) = -3/4$. Puesto que $f(-3/4) = 2(9/16) + 3(-3/4) + 1 = 9/8 - 18/8 + 8/8 = -1/8$, el vértice está en $(-3/4, -1/8)$.
3. Se escogen otros dos valores de x, uno a cada lado de $-3/4$. Se usan -2 y 0. $f(-2) = 2(4) + 3(-2) + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$, de modo que $(-2, 3)$ está en la gráfica, y $f(0) = 2(0) + 3(0) + 1 = 1$, de modo que $(0, 1)$ está en la gráfica.
4. Se localizan estos tres puntos y se unen para completar la parábola.



■

Ejercicios

Para las ecuaciones cuadráticas siguientes, determinar si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo, encontrar el vértice y trazar la gráfica. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. $y = x^2 + 7x + 12$
2. $y = -x^2 + 2x + 8$
3. $y = x^2 - 4x - 4$
4. $y = x^2 + 6x + 5$
5. $y = x^2 - 1$
6. $y = x^2 - 9$
7. $y = -x^2 + 4x$
8. $y = x^2 - 6x$
9. $y = 4x^2 - 4x + 1$
10. $y = 4x^2 - 4x - 3$
11. $y = 9x^2 - 9x + 2$
12. $y = 9x^2 - 3x - 2$
13. $y = x^2 + 2x + 3$
14. $y = -x^2 + 2x + 3$
15. $y = 2x^2 + 3x + 1$
16. $y = -2x^2 + 3x + 1$
17. $y = -2x^2 - 3x - 1$
18. $y = -x^2 - x + 1$
19. $y = -x^2 + x - 1$
20. $y = x^2 + x - 1$

*21. Se dice que una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x y que es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Determinar si las funciones siguientes son pares, impares o ni lo uno ni lo otro.

(a) $f(x) = x^2$
(b) $f(x) = |x|$
(c) $f(x) = x^3$
(d) $f(x) = |x^3|$
(e) $f(x) = -x^2$
(f) $f(x) = -x^3$

*22. Graficar las siguientes ecuaciones cuadráticas:

(a) $y = x^2$
(b) $y = 2x^2$
(c) $y = (x - 1)^2$
(d) $y = x^2 + 3$
(e) $y - 3 = 2(x - 1)^2$

*23. Si una ecuación cuadrática se escribe en la forma $y - c = d(x - e)^2$, ¿qué significan los números c, d y e?

*24. Una parábola $y = ax^2 + bx + c$ puede graficarse localizando primero el vértice. Para localizar n puntos de la gráfica, se empieza en el vértice y se avanza una unidad horizontal y $a(2n - 1)$ unidades verticales sucesivamente, donde $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dado que la gráfica es simétrica, también puede trazarse el lado de la izquierda. Verificar que este procedimiento es aplicable en los problemas 3, 7 y 13.

7.5. FUNCIONES POLINÓMICAS Y GRÁFICAS DE COMPUTADORA

Existen métodos cortos similares a los que se usaron en las funciones lineales y cuadráticas para graficar funciones polinómicas de grados superiores, pero requieren conocimientos de cálculo diferencial e integral. Sin recurrir al cálculo, lo más conveniente es localizar varios puntos y unirlos. Sin embargo, es necesario recordar que una función lineal es de grado uno y no tiene curvaturas; una función cuadrática es de grado dos y tiene una curvatura. Una función cúbica

es de grado tres y tiene dos curvaturas; una vez que se encuentran las dos curvaturas, se sabe que se tiene una gráfica razonablemente exacta.

Ejemplo 1

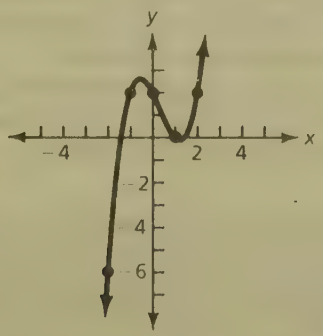
Graficar $y = x^3 - x^2 - 2x + 2$.

Solución

Se escogen varios valores de x, digamos, -2, -1, 0, 1 y 2. Por ser más conveniente, los valores correspondientes de la función se calculan y se enlistan en forma de tabla.

x	$x^3 - x^2 - 2x + 2$	y
-2	$(-2)^3 - (-2)^2 - 2(-2) + 2$	$-8 - 4 + 4 + 2 = -6$
-1	$(-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1) + 2$	$-1 - 1 + 2 + 2 = 2$
0	$0^3 - 0^2 - 2(0) + 2$	$0 - 0 + 0 + 2 = 2$
1	$1^3 - 1^2 - 2(1) + 2$	$1 - 1 - 2 + 2 = 0$
2	$2^3 - 2^2 - 2(2) + 2$	$8 - 4 - 4 + 2 = 2$

Se localizan estos cinco puntos y se unen con una curva continua trazada de izquierda a derecha. Ver la figura siguiente.



La mayoría de las funciones cúbicas siguen este patrón. Serán semejantes a la gráfica anterior o bien a la misma gráfica, pero vista desde atrás.

Ejemplo 2

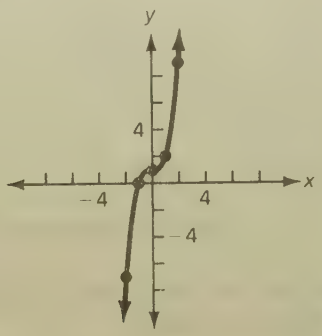
Trazar la gráfica de $y = x^3 + 1$.

Solución

Se escogen varios valores de x. Nuevamente se usan -2, -1, 0, 1 y 2. Se enlistan en forma de tabla y se calculan los valores correspondientes de la función.

x	$x^3 + 1$	y
-2	$(-2)^3 + 1$	$-8 + 1 = -7$
-1	$(-1)^3 + 1$	$-1 + 1 = 0$
0	$0^3 + 1$	$0 + 1 = 1$
1	$1^3 + 1$	$1 + 1 = 2$
2	$2^3 + 1$	$8 + 1 = 9$

Se localizan estos cinco puntos y se unen para formar una curva uniforme. Ver la siguiente figura.



■

En un principio, el ejemplo 2 no parece seguir el patrón descrito para una función cúbica. Pero si uno se imagina que la gráfica está hecha de alambre, se requerirían dos dobleces para formarla.

Sin embargo, cuando el grado de una función polinómica es mayor que tres, lo único que puede decirse de ella es que el número de curvaturas es a lo sumo uno menos que el grado de la misma.

Para trazar la gráfica de una función polinómica:

1. Se eligen varios valores de x. Por lo general cinco valores serán un buen principio para llegar a la gráfica.
2. Se calculan los valores correspondientes de la función.
3. Se localizan los puntos.
4. Se unen con una curva uniforme trazándola de izquierda a derecha.
5. Si el número de curvaturas de la gráfica es uno menos que el grado del polinomio, la gráfica es correcta. Si no, será necesario examinar más puntos hasta localizar todas las curvaturas o hasta tener la seguridad de que ya no hay más.

Ejemplo 3

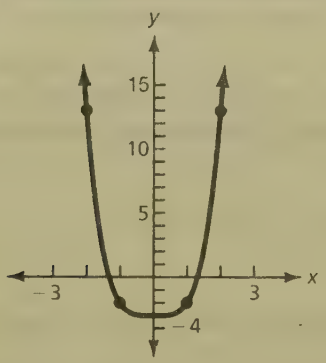
Trazar la gráfica de $y = x^4 - 3$.

Solución

A continuación, se presenta una tabla de valores.

x	$x^4 - 3$	y
-2	$(-2)^4 - 3$	$16 - 3 = 13$
-1	$(-1)^4 - 3$	$1 - 3 = -2$
0	$0^4 - 3$	$0 - 3 = -3$
1	$1^4 - 3$	$1 - 3 = -2$
2	$2^4 - 3$	$16 - 3 = 13$.

Se localizan estos cinco puntos y se unen. Ver la figura siguiente.



Debido a que en la gráfica sólo aparece una curvatura, se examinan los valores $x = 3$ y $x = -3$. Cuando $x = 3$, $y = 3^4 - 3 = 81 - 3 = 78$, y cuando $x = -3$, $y = (-3)^4 - 3 = 81 - 3 = 78$. Por tanto, se llega a la conclusión de que la gráfica tiene sólo una curvatura.

Para graficar ecuaciones en una microcomputadora, la pantalla se considera un plano cartesiano. Los rectángulos formados por una retícula imaginaria en la pantalla se llaman *pixels* (acrónimo de su nombre en inglés, *picture elements*, elementos de imagen). Cada pixel tiene tanto un valor x como uno y. El origen puede estar en la esquina superior izquierda o en la inferior izquierda; con la finalidad de ilustrarlo se supondrá que está en la inferior izquierda. En la figura 7.6 se muestra la parte inferior izquierda de la pantalla indicando las coordenadas de cada pixel.

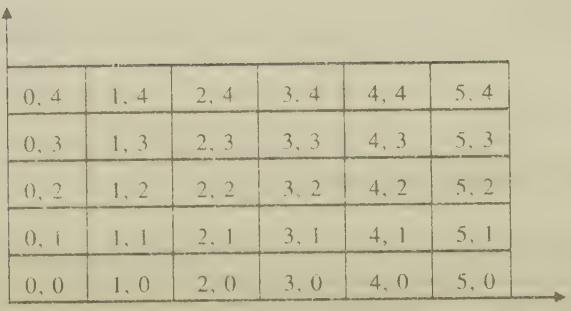


Figura 7.6

Un sistema típico tiene 280 pixels (numerados del 0 al 279) en cada renglón y 160 pixels (numerados del 0 al 159) en cada columna.

Si se trazara la gráfica de $y = x^2 - 5x + 6$, en la pantalla sólo aparecería el primer cuadrante. Sería más conveniente si los ejes estuvieran en el centro de la pantalla; éstos podrían visualizarse activando los pixels (140, N), donde N asume los valores de 0 a 159 y (K, 80) K los de 0 a 279. Ver la figura 7.7.

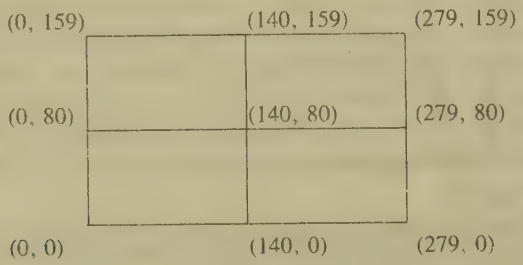


Figura 7.7

Sin embargo, se debe tenerse precaución al localizar las coordenadas de la función, ya que la esquina inferior izquierda sigue teniendo las coordenadas (0, 0). Pero (0, 0) de la gráfica que quiere trazarse tiene las coordenadas (140, 80) en la pantalla. En realidad se trabaja con dos gráficas diferentes. Para evitar confusiones, sean (x, y) las coordenadas reales de la función y sean (X, Y) las coordenadas que debe visualizar la computadora. Es decir, cuando $(x, y) = (0, 0)$,

se tiene (X, Y) = (140, 80). Cuando $x = 1$, $y = 1^2 - 5(1) + 6 = 2$. Pero se quiere que el punto (1, 2) aparezca una unidad adelante y dos arriba de (140, 80). Cuando $(x, y) = (1, 2)$, (X, Y) = (141, 82).

De hecho, puede hacerse una generalización; cuando la función tiene coordenadas (x, y), la computadora debe mostrar (X, Y) = $(x + 140, y + 80)$. Usando el dominio $\{ x \mid x \in I, -140 \leqslant x < 140 \}$ se lograría que la gráfica apareciera con los ejes en medio de la pantalla.

La gráfica sería muy angosta si se hace que un pixel corresponda con una unidad de la gráfica. Se obtendría una mejor gráfica si se hace que diez pixels representen una unidad de la gráfica. Cada vez que x o y cambien una unidad, X o Y cambiarán diez pixels. Es decir, $X = 10(x) + 140(y)$ y $Y = 10(y) + 80$. Si diez pixels son iguales a una unidad, entonces un pixel es igual a 1/10 de unidad, es decir, cada vez que x o y cambien 1/10, X o Y cambiarán un pixel.

No es necesario que las escalas de x y y sean iguales. De hecho, a fin de hacer que la gráfica quepa en la pantalla, puede ser necesario que las escalas sean diferentes.

Ejemplo 4

Describir cómo graficar $f(x)$ o $y = x^3 + 1$ en el centro de la pantalla utilizando una escala de diez pixels por unidad para el eje x, y una escala de cinco pixels por unidad para el eje y.

Solución

1. Se localizan los ejes en el centro de la pantalla según se describió arriba.
2. En lugar de que x asuma valores de -140 a 140, se permite que asuma valores de -14 a 14, ya que diez pixels representan una unidad. Puesto que cada pixel representa 1/10 de unidad, x crecerá en incrementos de 1/10.
3. $y = f(x) = x^3 + 1$.
4. $X = 10x + 140$.
5. $Y = 5y + 80$.
6. Se localizan (X, Y).

El procedimiento se generaliza como algoritmo:

Para graficar una función dada por $y = f(x)$ en una microcomputadora (280 × 160 pixels):

(a) el eje x debe estar N unidades arriba con una escala de una unidad = A pixels.

(b) El eje y debe estar M unidades a la derecha con una escala de una unidad = B pixels.

1. El eje x se trazará de (0, N) a (279, N).
2. El eje y se trazará de (M, 0) a (M, 159).
3. x asume valores de $-M/A$ a $(280 - M)/A$ en incrementos de $1/A$.
4. $y = f(x)$.
5. Se localiza (X, Y), donde $X = Ax + M$ y $Y = By + N$.

Ejemplo 5

Describir cómo graficar $y = x^2 + x - 1$ con el eje x 30 pixels arriba y el eje y 40 pixels a la derecha. Usar una escala de 20 pixels por unidad en el eje x y una escala de 10 pixels por unidad en el eje y.

Solución

1. El eje x correrá de (0, 30) a (179, 30).
2. El eje y correrá de (40, 0) a (40, 159).
3. x asumirá valores de -2 a 12 en incrementos de 0.05.
4. $y = x^2 + x - 1$.
5. Se localiza (X, Y), donde $X = 20x + 40$ y $Y = 10x + 30$.

Ejercicios

Trazar la gráfica de las funciones siguientes. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. $y = x^3 + x^2 - 9x - 9$
2. $y = x^3 - x^2 - 9x + 9$
3. $y = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$
4. $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
5. $y = x^3 - 2x + 1$
6. $y = x^3 - 2x^2 + 1$
7. $y = x^3 - x^2 + 4x - 4$
8. $y = x^4 - 10x^2 + 9$
9. $y = 4x^4 - 17x^2 + 4$
10. $y = 9x^4 - 13x^2 + 4$
11. $y = x^4 + 4x^2 + 3$
12. $y = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

Imaginar un sistema de coordenadas de 280 × 160 en el monitor de una computadora para las ecuaciones siguientes. Asimismo, supóngase que los ejes

deben estar en el centro de la pantalla. Describir cómo graficar las ecuaciones utilizando las escalas dadas. Ver los ejemplos 4 y 5.

13. $y = x^2 - 5x + 6$ con una escala de 20 pixels por unidad en ambos ejes.
14. $y = x^2 - 5x + 6$ con una escala de 20 pixels por unidad en el eje x, y una escala de 10 pixels por unidad en el eje y.
15. $y = x^3 - 5x + 6$ con una escala de 10 pixels por unidad en el eje x, y una escala de 20 pixels por unidad en el eje y.
16. $y = x^2 - 9$ con una escala de 70 pixels por unidad en ambos ejes.
17. $y = x^2 - 9$ con una escala de 40 pixels por unidad en el eje x, y una escala de 20 pixels por unidad en el eje y.

*19. Trazar la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$. ¿Representa la gráfica una función?

⇒20. Utilizando los datos dados del anterior problema, usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que indique un algoritmo para graficar la función en una microcomputadora.

*21. X (MOD N) es el residuo cuando X se divide por N.
Sea que rojo represente 0
azul represente 1
amarillo represente 2
verde represente 3 y
naranja represente 4.
Para valores enteros de x y y ($0 \leqslant x \leqslant 6$ y $0 \leqslant y \leqslant 6$), determinar el color asociado con $x^2 + y^2$ (MOD 5). Utilizando un sistema de coordenadas en el que las casillas representen coordenadas (como el ilustrado en la figura 7.6 de esta sección), colorear cada casilla (x, y) de acuerdo a $x^2 + y^2$ (MOD 5).

*22. Describir en qué forma sería diferente la graficación de una función en una computadora si el origen se localizara en la esquina superior izquierda de la pantalla, y los valores de y se incrementaran al moverse hacia abajo en el eje.

7.6. LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

En el capítulo 5 se trabajó con exponentes. Algunos de los problemas tenían base 2, algunos base 3, otros base 10, etc. Si el uso de exponentes se restringe a una sola base, a los exponentes se les llama *logaritmos*. La base 10 es de uso generalizado. Cuando la base es 10, los logaritmos se llaman *logaritmos comunes*. El símbolo *log* se refiere a los logaritmos comunes. Por tanto, si $a = 10^b$ se escribe $b = \log a$. Una de las bases más útiles es el número e. Con seis dígitos significativos, $e = 2.7182818$, pero al igual que π, es un número irracional y, por lo tanto, es un decimal infinito no periódico.

Definición.

Si $a = e^b$, entonces b es el *logaritmo natural* de a. Se escribe $b = \ln a$.

El símbolo ln significa *logaritmo natural* e indica que el número e es la base.

Ejemplo 1

Escribir los enunciados siguientes utilizando la notación de logaritmos naturales.

(a) $e^0 = 1$
(b) $e^2 = 7.39$
(c) $e^{-1} = 0.37$

Solución

(a) Puesto que 0 es el exponente o logaritmo, se tiene $\ln 1 = 0$.
(b) Puesto que 2 es el exponente o logaritmo, se tiene $\ln 7.39 = 2$.
(c) Puesto que -1 es el exponente o logaritmo, se tiene $\ln 0.37 = -1$.

Ejemplo 2

Escribir los enunciados siguientes utilizando la notación de exponentes.

(a) $\ln 1 = 0$
(b) $\ln 2 = 0.69$
(c) $\ln 3 = 1.10$

Solución

(a) $e^0 = 1$
(b) $e^{0.69} = 2$
(c) $e^{1.10} = 3$.

Se han elaborado tablas para encontrar el logaritmo natural de cualquier número positivo x. Es decir, para algún número positivo x existe un número y único asociado con él tal que $y = \ln x$. Esta correspondencia es una función, la cual se conoce con el nombre de función logarítmica. El dominio es $\{ x | x \in R, x > 0 \}$. Recuérdese que $y = \ln x$ significa $x = e^y$. Puesto que $e > 0$, no es posible que x sea menor o igual que cero.

También puede decirse que para cualquier número real x puede buscarse el número y que tiene a x como logaritmo natural. Es decir, la correspondencia $y = e^x$ también es una función, la que recibe el nombre de exponencial. El dominio es el conjunto de los números reales.

La función exponencial es particularmente útil en lenguajes de programación como el Pascal, el cual carece de un símbolo especial de exponente. Muchas aplicaciones administrativas incluyen grandes exponentes, y sería muy incómodo tener que usar la multiplicación

repetida en esos problemas. Por ejemplo, $P = (1 + r/360)^{365t}$ es la fórmula para calcular el capital principal después de t años si se invierte \$1.00 a una tasa anual del r por ciento (expresado en forma decimal), compuesto diariamente. El uso de la función exponencial permite trabajar con exponentes como $365t$.

Con frecuencia se requiere calcular valores de la forma a^b, donde $a > 0$. La base es a, no e. Pero se sabe que existe un número y tal que $y = \ln a$ y, por consiguiente, $a = e^y$. Pero como los logaritmos son exponentes, deben seguir las reglas expuestas en el capítulo 5.

Se tiene $a^b = (e^y)^b = (e^{\ln a})^b = e^{b(\ln a)}$.

Regla de los exponentes

$a^b = e^{b(\ln a)}$, donde a y b son números reales, y $a > 0$.

Ejemplo 3

Escribir $(2.3)^{1.5}$ utilizando la función exponencial.

Solución

$a = 2.3$ y $b = 1.5$ en este problema, de modo que se tiene $(2.3)^{1.5} = e^{1.5(\ln 2.3)}$.

Ejemplo 4

Escribir $(4.32)^{0.663}$ utilizando la función exponencial.

Solución

$a = 4.32$ y $b = 0.663$ en este problema, de modo que se tiene $(4.32)^{0.633} = e^{4.32(\ln 0.633)}$.

Ejemplo 5

Escribir $(1 + r/360)^{365t}$ utilizando la función exponencial.

Solución

$a = (1 + r/360)$ y $b = 365t$, de modo que se tiene $(1 + r/360)^{365t} = e^{365t\ln(1 + r/360)}$.

Muchos lenguajes de computadora permiten trabajar tanto con la función logarítmica como con la exponencial. En general, la función logarítmica se especifica como LN(X), la cual regresa el logaritmo natural del número X. La función exponencial suele especificarse como EXP(X), la cual regresa e^x.

Ejemplo 6

Escribir las expresiones siguientes para una computadora.

(a) ln 3.14
(b) ln 7
(c) ln (−3)

Solución

(a) LN(3.14)
(b) LN(7)
(c) La función no está definida para −3.

Ejemplo 7

Escribir las expresiones siguientes para una computadora.

(a) $e^{5.22}$
(b) e^{360}
(c) $e^{0.66}$

Solución

(a) EXP(5.22)
(b) EXP(360)
(c) EXP(0.66).

Ejemplo 8

Utilizando la función exponencial, escribir las expresiones siguientes para una computadora.

(a) $(2.3)^{1.5}$
(b) $(14.6)^{-2}$
(c) $(-3)^{4.1}$

Solución

(a) $(2.3)^{1.5} = e^{1.5(\ln 2.3)}$, por lo que se tiene EXP(1.5*LN(2.3)).
(b) $(14.6)^{-2} = e^{-2(\ln 14.6)}$, por lo que se tiene EXP(−2*LN(14.6)).
(c) $(-3)^{4.1} = e^{4.1(\ln -3)}$, pero ln −3 no está definido.

Ejercicios

Escribir los enunciados siguientes utilizando la notación de logaritmos naturales. Ver el ejemplo 1.

1. $e^{0.5} = 1.649$
2. $e^{1.5} = 4.482$

3. $e^{2.5} = 12.182$
4. $e^{3.5} = 33.115$
5. $e^{4.5} = 90.017$
6. $e^{5.5} = 244.692$
7. $e^{6.5} = 665.142$

Escribir las expresiones siguientes utilizando la notación exponencial. Ver el ejemplo 2.

8. $\ln 0.5 = -0.693$
9. $\ln 1.5 = 0.405$
10. $\ln 2.5 = 0.916$
11. $\ln 3.5 = 1.253$
12. $\ln 4.5 = 1.504$
13. $\ln 5.5 = 1.705$
14. $\ln 6.5 = 1.872$

Escribir las expresiones siguientes utilizando la función exponencial. Ver los ejemplos 3 al 5.

15. 2^3
16. 3^4
17. 4^5
18. $(2.5)^7$
19. $(8.3)^9$
20. $(2.1)^{3.6}$
21. $(7.8)^{4.1}$
22. $(19.31)^{-2}$
23. $(7.45)^{-3}$
24. $(82.7)^{-16.4}$
25. $(101.3)^{-8.1}$
26. $(1 + r)^{360}$

Escribir las expresiones siguientes para una computadora utilizando la función logarítmica o la exponencial. Ver los ejemplos 6 al 8.

27. $e^{0.5}$
28. $e^{2.5}$
29. $e^{-3.5}$
30. $e^{-4.5}$
31. $e^{-6.5}$
32. $\ln 8.8$
33. $\ln 7.3$
34. 2^3
35. 3^4
36. $(2.1)^{3.6}$
37. $\ln 0.5$
38. $\ln 2.5$
39. $\ln 5.5$
40. $(19.31)^{-8.1}$
41. $(1 + r)^{360}$
42. $(-5.1)^{3.6}$

Las computadoras no almacenan tablas de valores para las funciones exponencial y logarítmica. Más bien, esos valores se calculan cuando es necesario utilizando un número finito de términos de fórmulas como las que se presentan a continuación:

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots \text{ (donde } n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1)$$
$$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots .$$

*43. (a) Calcular $e^{2.5}$ utilizando los cuatro primeros términos de la fórmula.
(b) Calcular $e^{2.5}$ utilizando los cinco primeros términos de la fórmula.
(c) Comparar los resultados con el problema 3.

*44. (a) Calcular ln 2.5 utilizando los cuatro primeros términos de la fórmula.
(b) Calcular ln 2.5 utilizando los cinco primeros términos de la fórmula.
(c) Comparar los resultados con el problema 10.

*45. (a) Calcular 4^5 utilizando los cinco primeros términos de las fórmulas.
(b) Comparar el resultado con el verdadero valor de 4^5.

7.7. FUNCIONES DE COMPUTADORA

Los lenguajes de programación como el BASIC y el Pascal permiten definir y usar funciones. Hay también algunas funciones interconstruidas que pueden usarse. Aunque éstas difieren de una máquina a otra, en esta sección se presentarán algunas de las más comunes.

Definición

El *valor absoluto* de un número real x, denotado por $|x|$, es x si $x \geqslant 0$ y $-x$ si $x < 0$.

Esta definición dice que si x es positivo o cero ($x \geqslant 0$), el valor absoluto es igual al mismo número x. Sin embargo, si x es negativo ($x < 0$), entonces se multiplica por -1 y el producto será positivo. Es decir, el valor absoluto de cualquier número real es positivo o cero.

Ejemplo 1

Simplificar las expresiones siguientes.

(a) $|3|$
(b) $|-4|$
(c) $|-3/4|$
(d) $|0|$

Solución

(a) $|3| = 3$
(b) $|-4| = 4$
(c) $|-3/4| = 3/4$
(d) $|0| = 0$.

La mayoría de las computadoras usan ABS(X) como una función que regresa el valor absoluto del número real X.

Ejemplo 2

Determinar el número que representa cada una de las expresiones siguientes.

(a) ABS(−1)
(b) ABS(2)
(c) ABS(0.5)

Solución

(a) ABS(−1) = 1
(b) ABS(2) = 2
(c) ABS(0.5) = 0.5.

Una de las aplicaciones de la función del valor absoluto sería evitar el problema presentado en el algoritmo de la sección 4.3. Ese problema ocurrió porque la computadora redondeó la representación binaria del valor decimal 0.1. La suma fue 1.000000119209 en lugar de ser exactamente 1. El valor calculado difirió del que se esperaba, por ejemplo, de 1, por una cantidad muy pequeña. Pudo haberse especificado IF ABS(X − 1) < 0.0001 THEN, y así sucesivamente. Es decir, pudo haberse verificado la diferencia entre el valor calculado de X y su valor esperado. Si la diferencia es lo suficientemente pequeña, puede ignorarse como error de redondeo. El valor absoluto permite verificar estos pequeños errores, independientemente de si X es mayor o menor de lo que se esperaría.

Ejemplo 3

Determinar si ABS(X − 5) < 0.0001 para los siguientes valores de X.

(a) X = 5.000218
(b) X = 4.999995

Solución

(a) ABS(5.000218 − 5) = 0.000218, que no es menor que 0.0001.
(b) ABS(4.999995 − 5) = ABS(−0.000005) = 0.000005, que es menor que 0.0001.

Las funciones mayor que, de truncación y de redondeo se parecen entre sí, aun cuando presentan diferencias sutiles. Estas funciones se introducen de manera conjunta para enfatizar este punto.

Definición

El *entero mayor* en un número real x, denotado $[x]$, es el número entero inmediato, que es menor o igual que x.

Una forma de entender el entero mayor es imaginar que, a partir del número, se avanza a la izquierda sobre el eje x de una gráfica (en ocasiones llamado *recta numérica*) hasta encontrar un entero.

Ejemplo 4

Simplificar las expresiones siguientes.

(a) [2.3]
(b) [2]
(c) [−1.3]
(d) [−2.99]

Solución

(a) [2.3] = 2, puesto que 2 es el primer entero a la izquierda de 2.3 sobre la recta numérica.
(b) [2] = 2, ya que la definición establece que [x] es menor *o igual que* x.
(c) [−1.3] = −2, puesto que −2 es el primer entero a la izquierda de −1.3 sobre la recta numérica.
(d) [−2.99] = −3, puesto que −3 es el primer entero a la izquierda de −2.99 sobre la recta numérica.

Muchos lenguajes de computadora usan INT(X) como una función para regresar el mayor entero en el número real X.

Ejemplo 5

Determinar el número que representa cada una de las expresiones siguientes.

(a) INT(23.9)
(b) INT(2.4)
(c) INT(−25.1)
(d) INT(−25.87)

Solución

(a) INT(23.9) = 23
(b) INT(2.4) = 2
(c) INT(−25.1) = −26
(d) INT(−25.87) = −26

La función de truncación se usa más en computadoras que en matemáticas y no tiene un signo matemático.

Definición

Truncar un número real x significa omitir todos los dígitos decimales del número

Para valores positivos de x, la truncación de x daría el mismo resultado que encontrar el mayor entero en x. Pero para valores negativos de x, las dos funciones se comportan diferente. Por ejemplo, el mayor entero en -3.1 es -4, pero al truncar -3.1 se obtiene -3.

En ocasiones, se usa TRUNC(X) como función de computadora para regresar el valor truncado del número real X.

Ejemplo 6

Determinar el número que representa cada una de las expresiones siguientes. (Comparar los resultados con el ejemplo 4.)

(a) TRUNC(23.9)
(b) TRUNC(2.4)
(c) TRUNC(−25.1)
(d) TRUNC(−25.87)

Solución

(a) TRUNC(23.9) = 23
(b) TRUNC(2.4) = 2
(c) TRUNC(−25.1) = −25
(d) TRUNC(−25.87) = −25

Obsérvese que no es lo mismo truncar un número real que redondearlo. Para redondear un número real al entero más próximo, se toma el entero que está más cerca de él (a la izquierda o a la derecha) sobre la recta numérica. La función de redondeo puede definirse en términos de la función del entero mayor.

Definición

Para redondear un número real x al entero mayor se encuentra el entero mayor en $(x + 0.5)$.

Esta definición es equivalente a la regla que establece que si el dígito en la posición de las décimas es menor que 5, el dígito de las unidades no cambia; si el dígito en la posición de las décimas es 5 o mayor, se suma 1 al dígito de las unidades.*

* En ocasiones, se aplica otra regla para redondear al entero más próximo: si el dígito de las décimas es menor que 5, el dígito de las unidades no cambia. Si el dígito de las décimas es mayor que 5, se suma 1 al de las unidades. Si el dígito de las décimas es 5, entonces el propio dígito de las unidades determina el redondeo. Si es par, no cambian; si es impar, se suma 1.

Ejemplo 7

Determinar el número que representa cada una de las expresiones siguientes.

(a) ROUND(2.3)
(b) ROUND(2.7)
(c) ROUND(−1.3)
(d) ROUND(−2.99)

Solución

(a) ROUND(2.3) = 2
(b) ROUND(2.7) = 3
(c) ROUND(−1.3) = −1
(d) ROUND(−2.99) = −3.

Sin embargo, no siempre se quiere redondear al entero más próximo. Por ejemplo, en cálculos financieros se podría redondear a centésimas para indicar pesos y centavos. Es posible definir una función por medio de la cual se efectúe el redondeo: $f(x) = [100x + 0.5]/100$ redondeará x a la centésima más próxima. Esta expresión podría escribirse para la computadora como INT(100* X + 0.5) /100. Considérese X = 2.394. Se tiene

```
INT(100*2.394 + 0.5)/100 =
INT(239.4 + 0.5)/100 =
INT(239.9)/100 =
239/100 =
2.39.
```

Ejemplo 8

Verificar que la función de computadora INT(100* X + 0.5)/100 produce el resultado correcto al redondear a centésimas los números siguientes.

(a) 34.7994
(b) −6.723

Solución

```
(a) INT(100*34.7994 + 0.5)/100 = INT(3479.94 + 0.5)/100 =
                                 INT(3480.44)/100
                                 3480/100
                                 34.80
(b) INT(100*(−6.723) + 0.5)/100 = INT(−672.3 + 0.5)/100 =
                                  INT(−671.8)/100
                                  −672/100
                                  −6.72.
```

Este proceso de redondeo podría generalizarse si se utiliza la regla siguiente.

Para redondear un número real x a N cifras decimales:

Usar la función $f(x) = [10^N x + 0.5]/10^N$.

Comparar las gráficas de Y = INT(X), Y = TRUNC(X) y Y = ROUND(X) en la figura 7.8. El círculo vacío indica que el valor no es parte de la función.

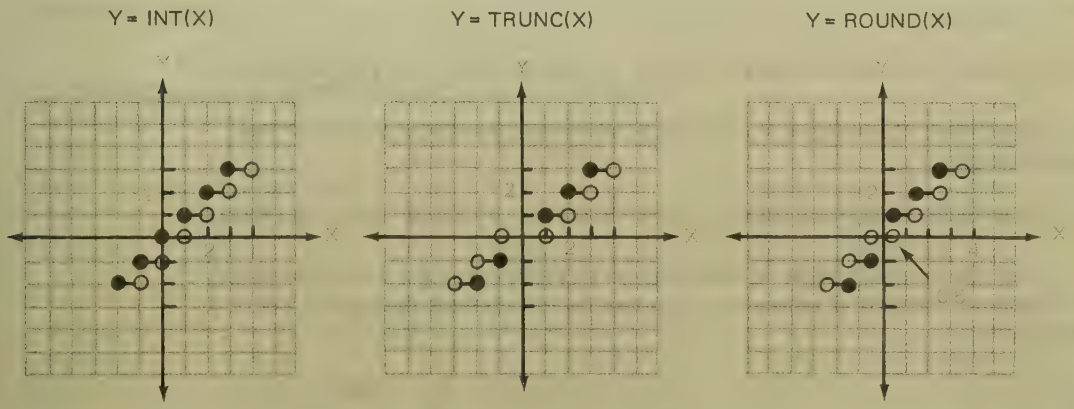


Figura 7.8

Ejercicios

Simplificar las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 1.

1. |2.3| **2.** |–2.3| **3.** |–7| **4.** |7|

Determinar el número que representa cada una de las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 2.

5. ABS(5.7) **6.** ABS(–5.7) **7.** ABS(–6.33) **8.** ABS(9.21)

Determinar si ABS(X – 1) < 0.0001 para los problemas siguientes. Ver el ejemplo 3.

9. X = 1.000001 **10.** X = 0.999999 **11.** X = 1.023

Determinar si ABS(X − 3) < 0.0001 para los problemas siguientes. Ver el ejemplo 3.

12. X = 3.00001 **13.** X = 2.00999 **14.** X = 2.99991

Simplificar las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 4.

15. [2.4] **16.** [5.83] **17.** [−5.83] **18.** [−2.4]

Determinar el número que representa cada una de las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 5.

19. INT(2.4) **20.** INT(−2.4) **21.** INT(−19.8) **22.** INT(19.8)

Determinar el número que representa cada una de las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 6.

23. TRUNC(2.4) **24.** TRUNC(−2.4) **25.** TRUNC(−19.8) **26.** TRUNC(19.8)

Determinar el número que representa cada una de las expresiones siguientes. Ver el ejemplo 7.

27. ROUND(2.4) **28.** ROUND(−2.4) **29.** ROUND(−19.8) **30.** ROUND(19.8)

Verificar que la función de computadora INT(100* X + 0.5)/100 produzca el resultado correcto al redondear a centésimas los números siguientes. Ver el ejemplo 8.

31. 4.2121	**32.** 2.7291	**33.** 3.166
34. −4.2121	**35.** −2.7291	**36.** −3.166

***37.** Trazar la gráfica de (a) $y = |x|$.
(b) $y = |x - 1|$.
(c) $y = |x| - 1$.

***38.** Trazar la gráfica de $y = |x| \pm \sqrt{1 - x^2}$.

***39.** Trazar la gráfica de $y = x - [x]$.

Revisión de capítulo

Una _____ es una correspondencia entre dos conjuntos tal que existe exactamente un elemento del segundo conjunto asociado con cada elemento del primero. Al primer conjunto se le llama _____ y al segundo _____ .

En la expresión $f(x)$, la letra f denota la función, y el número entre paréntesis se llama la _____ de la función.

A la literal x se le llama la variable _____ y a la literal y se le llama la variable _____ .

En un sistema de coordenadas rectangulares al eje horizontal se le llama _____ y al vertical _____. Al punto de intersección de los dos ejes se le llama el _____.

Los ejes dividen el plano en cuatro regiones llamadas _____.

Si no corresponde una gráfica a una función, es posible colocar una recta _____ en el plano tal que corte la gráfica en más de un punto.

Al punto donde una recta corta el eje y se le llama _____. La _____ de una recta en ocasiones se describe como avance vertical/avance horizontal.

En la ecuación $y = mx + b$, m es la _____ y b es la _____.

Prueba de capítulo

1. Determinar si la correspondencia es una función:

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 2x - 3$, evaluar:

2. $f(1)$.
3. $f(-2) + g(-2)$.

Determinar si la correspondencia es una función. Si lo es, especificar el dominio.

4. $f(x) = 2x + 1$ 5. $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ 6. $h(x) = x^2 + 3$

Graficar las funciones siguientes en el mismo plano.

7.

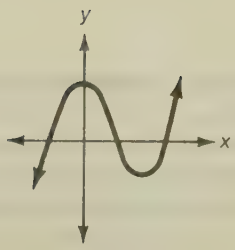
x	y
-1	-1
0	1
1	3

8.

x	y
-1	1
0	1
1	-3

Determinar si las gráficas siguientes representan una función.

9.

10. 

Graficar las ecuaciones siguientes.

11. $y = 3$.
12. $y = -3x$.

Identificar la pendiente y la ordenada al origen.

13. $y = -x + 4$.
15. Graficar: $x + 3y = 6$.
14. $x = 2y - 3$.

Determinar para las ecuaciones cuadráticas siguientes si la parábola abrirá hacia arriba o hacia abajo, encontrar el vértice y trazar la gráfica.

16. $y = x^2 - 16$
17. $y = -x^2 + 5x$
18. $y = x^2 + 4x + 4$
19. $y = 2x^2 + 2x + 3$
20. $y = -3x^2 - x + 1$

Trazar las gráficas de las funciones siguientes.

21. $y = x^3 - 4$
22. $y = x^3 - 4x$
23. $y = x^3 - 4x^2$
24. $y = x^4 + 3x^2 - 4$
25. $y = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

Suponer un sistema de coordenadas de 280 × 160 en el monitor de una computadora. Suponer también que los ejes deben estar en el centro de la pantalla. Describir la forma de graficar las funciones siguientes utilizando las escalas dadas.

26. $y = x^2 - 4x + 4$ con 20 pixels por unidad en ambos ejes.
27. $y = 2x^2 - 4$ con 20 pixels por unidad en ambos ejes.
28. $y = x^2$ con 20 pixels por unidad en ambos ejes.
29. Escribir $e^{7.5} = 1808.04$ utilizando la notación de logaritmo natural.
30. Escribir $\ln 7.5 = 2.01$ utilizando la notación exponencial.
31. Escribir $(56)^{2.7} = 52\,493.76$ mediante notación exponencial.

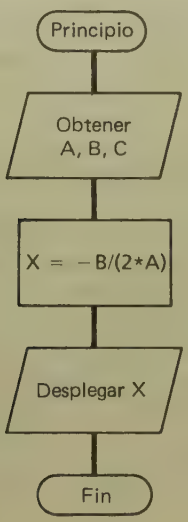
Escribir las expresiones siguientes para una computadora utilizando la función LN o EXP.

32. $e^{7.5}$.
33. $\ln 7.5$.

Determinar el número que representan cada una de las expresiones siguientes.

34. (a) $|-16.1|$
    (b) ABS(16.1)
35. (a) [4.11]
    (b) [−4.11]
36. (a) INT(2.8)
    (b) TRUNC(2.8)
    (c) ROUND(−2.8)
37. ¿Es ABS(X − 2) < 0.0001 si X = 2.001?
38. Verificar que la función de computadora INT(100 * X + 0.5)/100 produzca el resultado correcto al redondear a centésimas X = 5.731.

⇒**39.** En el siguiente diagrama de flujo se presenta un algoritmo que da la coordenada x del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Modificarlo para obtener también la coordenada y del vértice y los puntos cuya coordenada x sea una unidad más y una unidad menos que la correspondiente al vértice.



BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Burckardt, J. J. "Leonhard Euler, 1707-1783," *Mathematics Magazine,* Vol. 56 No. 5 (Noviembre 1983), 262-273.

Lifshitz, Maxine Rosman. "Little Known Facts About the Quadratic Function" *The Mathematics Teacher*, Vol. 77 No. 5 (Mayo 1984), 353-356. (Se dan sugerencias para graficar funciones cuadráticas.)

Pierce, R. C. "A Brief History of Logarithms," *The Two-Year College Mathematics Journal,* Vol. 8 No. 1 (Enero 1977), 22-26.

Pulfer, Wayne. "The Inverse of a Function (of a Single Variable)," *The Mathematics Teacher,* Vol. 77 No. 1 (Enero 1984), 34-35. (A las funciones inversas se les relaciona con las operaciones inversas.

Biografía — Leonhard Euler

Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707 en Suiza. Su padre quería que fuera ministro como él, pero Euler se interesaba más en las matemáticas.

En 1727 partió a San Petersburgo para hacerse cargo de una cátedra de fisiología (materia que había estudiado unos cuantos meses). Sin embargo, el día de su llegada murió la zarina Catalina, benefactora de la Academia de Ciencias, y sus herederos suspendieron el apoyo económico. Euler se enroló en la armada rusa mientras se reanudaba el envío de fondos para la Academia.

Contrajo matrimonio con Catherine Gsell, hija del artista suizo Georg Gsell. Tuvieron 13 hijos, pero sólo cinco sobrevivieron después de la infancia. Euler escribió con frecuencia sus artículos con niños sobre sus piernas y otros jugando cerca de él. Se le conoce como el matemático más prolífico que haya existido porque publicó muchos libros y casi 800 artículos. Trabajó mucho con funciones e introdujo la notación f y el símbolo e.

En 1738 perdió la vista en el ojo derecho. Según una leyenda, la pérdida fue causada por el intenso trabajo en un problema astronómico. En 1741 Euler aceptó un puesto en la Academia de Ciencias de Berlín. Volvió a Rusia en 1766 después de que se le comunicó que él mismo podía redactar su contrato.

Después de que se le extirpó una catarata del ojo izquierdo en 1771, una infección lo dejó totalmente ciego. Dictaba a sus asistentes y usaba una enorme pizarra para escribir fórmulas para ellos. Cuenta una historia que dos de sus estudiantes no estaban de acuerdo con un resultado en la cifra decimal 50. Euler realizó el cálculo mentalmente y obtuvo la respuesta correcta.

El 18 de septiembre de 1783 Euler trabajaba en los cálculos de la órbita del planeta recién descubierto, Urano. Jugó con su nieto, tomó té y murió repentinamente.

8

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de tres ecuaciones con tres variables representa tres planos. Estos últimos pueden intersecarse en un solo punto, como el piso y dos paredes de una habitación.

8.1. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES

En el capítulo 6 se abordó el tema de las ecuaciones. Recuérdese que resolver una ecuación significa encontrar los valores que cuando se sustituyen en lugar de las variables, hacen verdadera la ecuación. En este capítulo se estudian los sistemas de ecuaciones.

Definición

Un sistema de ecuaciones lineales simultáneas es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales.

Considérese $x + y = 5$
$x - y = 1.$

Para cada ecuación por separado existe un número infinito de pares ordenados (x, y) que la harán verdadera; por ejemplo, $x + y = 5$ es verdadera para $(1, 4)$, $(6, -1)$ y $(0, 5)$, por citar sólo tres posibilidades. La ecuación $x - y = 1$ es verdadera para $(5, 4)$, $(-1, -2)$ y $(0, -1)$, entre otros valores.

Resolver el sistema significa encontrar los valores (en este caso los pares ordenados) que harán verdaderas, al mismo tiempo, a ambas ecuaciones. El par ordenado $(3, 2)$ es la solución de este sistema.

Es posible llegar a una interpretación geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones si las dos ecuaciones se grafican en el mismo

plano coordenado. Cada punto de la gráfica de $x + y = 5$ representa una solución de esa ecuación, así como cada punto de la gráfica de $x - y = 1$. El punto (3, 2) es el único punto que pertenece a ambas gráficas. Ver la figura 8.1.

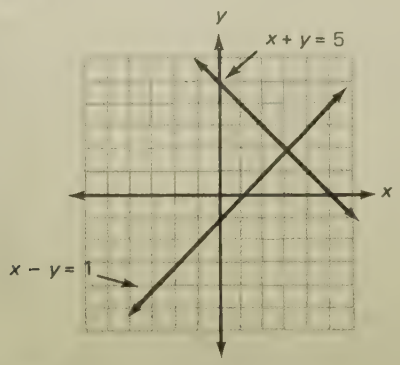


Figura 8.1

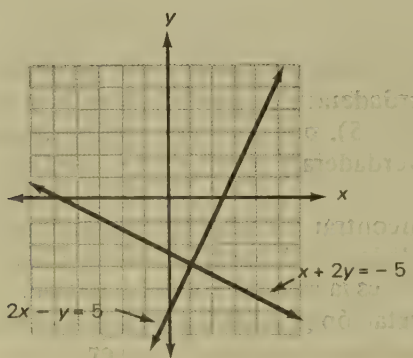
Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas con dos variables:

1. Se grafica la primera ecuación en un sistema de coordenadas rectangulares.
2. Se grafica la segunda ecuación en el mismo sistema de coordenadas rectangulares.
3. Se identifica el punto de intersección de las dos rectas.

Ejemplo 1

Resolver el sistema $2x - y = 5$
$x + 2y = -5.$

Solución



La solución es $(1, -3)$.

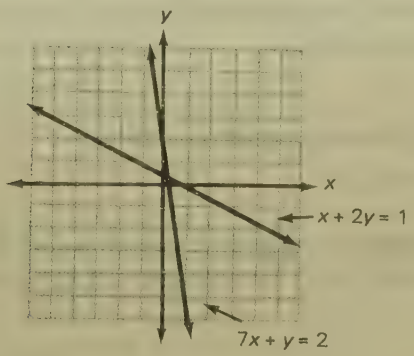
La graficación como método para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones presenta dos grandes desventajas:

1. Es difícil leer la solución en la gráfica cuando las coordenadas de la solución son fracciones.
2. Es difícil hacer una generalización para tres o más variables. En el ejemplo siguiente se ilustra la dificultad para leer fracciones en la gráfica.

Ejemplo 2

Resolver el sistema $x + 2y = 1$
$7x + y = 2.$

Solución



. No es posible leer la solución $(3/13, 5/13)$ en la gráfica.

La solución algebraica permite calcular la solución exacta. El método que se presenta a continuación suele llamarse *de eliminación.*

Se considerará nuevamente el sistema $x + y = 5$
$x - y = 1.$

Si se suma la segunda ecuación a la primera, se habrán sumado números iguales a ambos miembros de la primera ecuación. La ecuación resultante es $2x = 6$, de donde $x = 3$. Puesto que la solución del sistema satisface ambas ecuaciones, el valor de y puede calcularse si se sustituye $x = 3$ en cualquiera de ellas. Utilizando la primera ecuación, $3 + y = 5$, de donde $y = 2$.

El hecho de que se tuviera $+y$ y $-y$ en este sistema permitió la *eliminación* de la variable y. La ecuación resultante se resolvió aplicando las técnicas del capítulo 6.

Ejemplo 3

Resolver el sistema $x + 2y = 1$ (1)
$7x + y = 2$ (2)
por el método de eliminación.

Solución

Se trata de eliminar una de las variables. Sin embargo, primero debe reemplazarse una de las ecuaciones con otra equivalente. Es importante entender que puede eliminarse cualquiera de las variables. Si se decide eliminar x, debe obligarse a que la ecuación (1) contenga el término $-7x$. Esta modificación puede hacerse si ambos miembros de la ecuación se multiplican por -7. Se tiene

$$\begin{array}{rl} -7x - 14y = -7 & \\ 7x + y = 2. & \text{Al sumar las dos ecuaciones se obtiene} \\ \hline -13y = -5, & \text{de donde } y = 5/13. \end{array}$$

Si se hubiera optado por eliminar y en vez de x, se habría obligado a que la ecuación (2) contuviera $-2y$ multiplicando ambos miembros de la ecuación por -2. Se habría obtenido.

$$\begin{array}{rl} x + 2y = 1 & \\ -14x - 2y = -4. & \text{Al sumar las dos ecuaciones se obtiene} \\ \hline -13x = -3, & \text{de donde } x = 3/13. \end{array}$$

De la eliminación de x se obtiene el valor de y, mientras que de la eliminación de y se obtiene el valor de x. No importa cuál se encuentre primero.

Ejemplo 4

Resolver el sistema $2x - y = 5$ (1)
$x + 2y = -5$ (2)
por el método de eliminación.

Solución

Para eliminar x se multiplica la ecuación (2) por -2.
Se obtiene

$$\begin{array}{rl} 2x - y = 5 & \\ -2x - 4y = 10. & \text{Al sumar las dos ecuaciones se obtiene} \\ \hline -5y = 15, & \text{de donde } y = -3. \end{array}$$

Para eliminar y se multiplica la ecuación (1) por 2. Se obtiene

$$\begin{array}{rl} 4x - 2y = 10 & \\ x + 2y = -5. & \text{Al sumar las dos ecuaciones se obtiene} \\ \hline 5x = 5, & \text{de donde } x = 1. \text{ La solución es } (1, -3). \end{array}$$

En ocasiones es necesario reemplazar ambas ecuaciones a fin de eliminar una de las variables.

Ejemplo 5

Resolver el sistema $2x + 5y = 1$ (1)
$3x - 4y = -10$ (2)
por el método de eliminación.

Solución

Para eliminar x se obliga a que la ecuación (1) contenga el término $+6x$ y a que la ecuación (2) comprenda el mismo término. Es decir, se multiplica la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por -2. Se obtiene

$$\begin{array}{r} 6x + 15y = 3 \\ -6x + 8y = 20. \\ \hline 23y = 23, \end{array}$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene de donde $y = 1$.

Para eliminar y se multiplica la ecuación (1) por 4 y la ecuación (2) por 5 para obtener $20y$ y $-20y$. Obsérvese que los signos ya son opuestos:

$$\begin{array}{r} 8x + 20y = 4 \\ 15x - 20y = -50. \\ \hline 23x = -46, \end{array}$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene de donde $x = -2$.

La solución es, por tanto, $(-2, 1)$.

Ejemplo 6

Resolver el sistema $5x + 3y = 7$ (1)
$4x - 2y = 5$ (2)
por el método de eliminación.

Solución

Para eliminar x se multiplica la ecuación (1) por -4 y la ecuación (2) por 5. Se obtiene

$$\begin{array}{r} -20x - 12y = -28 \\ 20x - 10y = 25. \\ \hline -22y = -3, \end{array}$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene de donde $y = 3/22$.

Para eliminar y se multiplica la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por 5. Se obtiene

$$\begin{array}{r} 10x + 6y = 14 \\ 12x - 6y = 15. \\ \hline 22x = 29, \end{array}$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene de donde $x = 29/22$. La solución es $(29/22, 3/22)$.

Cuando el primer valor es una fracción y no un entero (como en el ejemplo 6), el sistema se resuelve aplicando el proceso de eliminación a cada variable. Cuando el primer valor es un entero, como en los ejemplos 4 y 5, quizás sea más fácil encontrar el segundo valor sustituyendo el primero en cualquiera de las ecuaciones. Ambas llevarán a la misma respuesta, de modo que se elige la que sea más fácil de resolver y el procedimiento puede generalizarse.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas con dos variables por el método de eliminación:

1. Si las ecuaciones no están en la forma $ax + by = c$, escribir ecuaciones equivalentes en dicha forma.
2. Elegir la variable que va a eliminarse (llamada *pivote*).
3. De ser necesario, multiplicar una de las ecuaciones o ambas a fin de hacer que los coeficientes de la variable pivote tengan el mismo valor absoluto, pero con signos opuestos.
4. Sumar las dos ecuaciones.
5. Resolver la ecuación resultante.
6. (a) Si el valor de esta variable es un entero, sustituirlo en cualquiera de las ecuaciones para encontrar el valor de la otra variable.
   (b) Si el valor de la primera variable es una fracción, se vuelve al problema original y se repiten los pasos 2 al 5 utilizando la otra variable como pivote.

Ejemplo 7

Resolver $3x + 4y = 10$ (1)
$5x - 7 = 3y$ (2)
por el método de eliminación.

Solución

1. Se sustituye la ecuación (2) por la ecuación equivalente

$$5x - 3y = 7. \quad (3)$$

2. Se elige y como variable pivote (el problema también podría resolverse eligiendo a x).
3. Se multiplica la ecuación (1) por 3 y la ecuación (3) por 4.

$$9x + 12y = 30$$
$$20x - 12y = 28.$$

4. $29x \quad = 58$ es resultado de sumar las dos ecuaciones.
5. Por tanto, $x = 2$.
6. Puesto que 2 es un entero, se sustituye $x = 2$ en la primera ecuación: $3(2) + 4y = 10$ o $6 + 4y = 10$ o $4y = 4$, de donde $y = 1$.

La solución es (2, 1).

Ejemplo 8

Resolver $3x + 2y - 5 = 0$ (1)
$6x + 4y = 10.$ (2)

Solución

1. Se reemplaza (1) por la ecuación equivalente

$$3x + 2y = 5. \qquad (3)$$

2. Se elige x como la variable pivote.
3. Al multiplicar la ecuación (3) por -2 se obtiene

$$\begin{array}{r} -6x - 4y = -10 \\ 6x + 4y = 10 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

4. Al sumar las dos ecuaciones se obtiene
5. Al eliminar x también se elimina y.

Toda solución de una ecuación lo es de la otra, por lo que existe un número infinito de soluciones del sistema. Se dice que el sistema es *dependiente*. Gráficamente, una ecuación produciría la misma recta que la otra, porque aquélla es un múltiplo de ésta (i.e., son ecuaciones equivalentes).

Ejemplo 9

Resolver $-2x + 4y = 7$ (1)
$x - 2y = 3.$ (2)

Solución

1. Las ecuaciones están en la forma correcta.
2. Se elige eliminar x.
3. Al multiplicar por 2 la ecuación 2 se obtiene

$$\begin{array}{r} -2x + 4y = 7 \\ 2x - 4y = 6. \\ \hline 0 = 13. \end{array}$$

4. Se suman las dos ecuaciones para obtener
5. Al eliminar x nuevamente se elimina y, pero en esta ocasión la expresión resultante ($0 = 13$) es falsa. No hay valores de x y y para los cuales la ecuación sea verdadera. Se dice que el sistema es *inconsistente*. Gráficamente, las dos ecuaciones producirán rectas que son paralelas entre sí y, por tanto, nunca se intersecan.

Ejercicios

Graficar cada par de ecuaciones y determinar la solución del sistema en la gráfica. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. $x + y = 8$
   $2x - y = 1$
2. $2x + y = 8$
   $x + 2y = 10$
3. $3x - 2y = 1$
   $4x - y = 1$
4. $2x + 3y = 1$
   $3x - 2y = -5$
5. $x + 2y = 1$
   $2x - y = 0$
6. $6x + 6y = 7$
   $6x - 6y = 1$
7. $x + 3y = 4$
   $2x + 6y = 7$
8. $2x - 5y = 10$
   $4x - 10y = 20$
9. $3x - 4y = 12$
   $9x - 12y = 36$
10. $x + 7y = 7$
    $2x + 14y = 15$

Resolver los sistemas de ecuaciones por el método de eliminación. Ver los ejemplos 3 al 9.

11. $x + y = 8$
    $2x - y = 1$
12. $2x + y = 8$
    $x + 2y = 10$
13. $3x - 2y = 1$
    $4x - y = 1$
14. $2x + 3y = 1$
    $3x - 2y = -5$
15. $x + 2y = 1$
    $2x = y$
16. $6x + 6y = 7$
    $6y = 6y + 1$
17. $x + 3y = 4$
    $2x + 6y = 7$
18. $2x = 5y + 10$
    $4x = 10y + 20$
19. $3x - 4y = 12$
    $9x - 12y = 36$
20. $x + 7y - 7 = 0$
    $2x + 14y - 15 = 0$
21. $x + 3y = 7$
    $2x + y + 1 = 0$
22. $2x = 3y + 8$
    $5x + 2y = 1$
23. $3x + 2y = 0$
    $3x = 2y$
24. $3x - 4y = 1$
    $4x = 3y - 1$

*25. Si $2^{(2x+y)} = 256$ y $3^{(y-x)} = 243$, encontrar x y y.

*26. Un número de dos dígitos es tal que la suma de los mismos es 9. Cuando el orden de los dígitos se invierte, el número resultante es nueve unidades menor que el triple del número original. ¿Cuál era el número original?

*27. Si el número de tres dígitos $1a2$ se suma a 345, el resultado es el número de tres dígitos $4b7$, el cual es divisible entre 9. Encontrar los dígitos a y b.

8.2. SISTEMAS DE TRES ECUACIONES

La estrategia para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables consiste en considerar las ecuaciones de dos en dos. Al eliminar una de las variables en un par de ecuaciones, éste se reduce a una ecuación con dos variables. Una vez que se ha eliminado la misma variable en dos pares, puede encontrarse la solución del sistema formado por las ecuaciones resultantes.

Considérese el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \quad (1)\\ x + 2y + 3z &= 7 \quad (2)\\ 2x - y + z &= 4. \quad (3) \end{aligned}$$

Se trata de eliminar una de las variables en las tres ecuaciones. Puesto que x aparece en primer lugar en cada ecuación, y en segundo y z en tercero, se pasa directamente al método de eliminación. Se elimina la x. Trabajando con las ecuaciones de dos en dos, se consideran las dos primeras para obtener el sistema

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \quad (1)\\ x + 2y + 3z &= 7. \quad (2) \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación (1) por -1 se obtiene

$$-x + 3y - 2z = -5$$

La ecuación (2) es

$$x + 2y + 3z = 7$$

Al realizar la suma se obtiene

$$5y + z = 2.$$

Aún no se considera la ecuación (3) del sistema original. También debe eliminarse x en ésta. Puede formarse un par con cualquiera de las otras dos ecuaciones. Se elige la primera, de modo que se llega al sistema:

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \quad (1)\\ 2x - y + z &= 4. \quad (3) \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación (1) por -2 se obtiene

$$-2x + 6y - 4z = -10$$

La ecuación (3) es

$$2x - y + z = 4$$

Al realizar la suma se obtiene

$$5y - 3z = -6$$

Los resultados de estos dos procedimientos de eliminación dan un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Es decir, se tiene

$$5y + z = 2 \quad (4)$$
$$5y - 3z = -6. \quad (5)$$

Al resolver este sistema para y y z se obtendrán los valores de dos de las tres variables del sistema original.

Se elimina y multiplicando la ecuación (5) por -1 y sumando las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 5y + z = 2 \\ -5y + 3z = 6 \\ \hline 4z = 8, \text{ de donde } z = 2. \end{array}$$

El valor de y se encuentra al sustituir el valor $z = 2$ en la ecuación (4). Por tanto, $5y + 2 = 2$, de donde $5y = 0$ y $y = 0$.

Ahora que se conocen los valores de y y z, se usa otra vez el sistema original de tres ecuaciones para encontrar el de x. Puede usarse cualquiera de las tres ecuaciones, ya que todas producirán la misma solución. Se elige la primera. $x - 3y + 2z = 5$ será

$$\begin{array}{lll} & x - 3(0) + 2(2) = 5, \text{ o} \\ & x + 4 = 5 \\ \text{de donde} & x = 1. \end{array}$$

Se tiene ahora la solución completa (1, 0, 2), y para verificarla se sustituyen los valores en el sistema original:

$$1 - 3(0) + 2(2) = 5 \text{ o } 1 + 4 = 5$$
$$1 + 2(0) + 3(2) = 7 \text{ o } 1 + 6 = 7$$
$$2(1) - 0 + 2 = 4 \text{ o } 2 + 2 = 4.$$

Este procedimiento se resume de la manera siguiente.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales simultáneas con tres variables:

1. Se ordenan los términos de las ecuaciones de tal modo que aparezcan en el mismo lugar en cada una de ellas.
2. Se elige la variable pivote para el paso de eliminación.
3. Se usan dos de las tres ecuaciones para eliminar la variable

pivote. (Se multiplica una de las ecuaciones, o ambas, para hacer que los coeficientes tengan el mismo valor absoluto pero con signos diferentes, y se suman las ecuaciones.)
4. Se forma otro par con la ecuación restante y una de las dos ecuaciones anteriores y se elimina la variable pivote.
5. Se usan las ecuaciones resultantes de los pasos 3 y 4 para formar y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables.
6. Otra vez, con base en el sistema original de tres ecuaciones, se elige una de las ecuaciones y se sustituyen los valores encontrados en el paso 5. Se resuelve la ecuación para la variable restante.

Ejemplo 1

Resolver
$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 2 \quad (1)\\ 3x - y + 4z &= 9 \quad (2)\\ 4x + 2y - 3z &= 7. \quad (3)\end{aligned}$$

Solución

1. Las variables aparecen en el mismo orden en las tres ecuaciones, por lo que el sistema está listo para el paso de eliminación.
2. Se decide eliminar y.
3. Se forma un par con la primera y la segunda ecuación y se elimina y.

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 2\\ 3x - y + 4z &= 9. \text{ Al sumar se tiene.}\\ \hline 5x \quad + \quad z &= 11. \quad (4)\end{aligned}$$

4. Se forma un par con la ecuación (3) y la (1) y se elimina y: Al multiplicar la ecuación (1) por -2 se obtiene

$$\begin{aligned} &-4x - 2y + 6z = -4.\\ \text{La ecuación (3) es} \quad &4x + 2y - 3z = 7.\\ \hline \text{Al sumar las dos} \quad &3z = 3 \text{ o}\\ \text{ecuaciones se obtiene} \quad &z = 1. \quad (5)\end{aligned}$$

5. Se hace un sistema con los resultados de los pasos 3 y 4.

$$\begin{aligned} 5x + z &= 11 \quad (4)\\ z &= 1. \quad (5)\end{aligned}$$

Al resolver este sistema se obtiene $z = 1$ y $5x + 1 = 11$, o $5x = 10$, de donde $x = 2$.

6. Se vuelve al sistema original y se elige la primera ecuación. Al sustituir $x = 2$ y $z = 1$ (del paso 5) se obtiene

$$\begin{aligned} 2(2) + y - 3(1) &= 2 \\ 4 + y - 3 &= 2 \\ 1 + y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

La solución completa es (2, 1, 1).

Ejemplo 2

Resolver. $2x - 3y - 2z = 5$ (1)
$x + 2y + 2z = 0$ (2)
$y - z = 3.$ (3)

Solución

Se decide eliminar x.

De (1) y (2):
$$\begin{array}{r} 2x - 3y - 2z = 5 \\ -2x - 4y - 4z = 0 \\ \hline -7y - 6z = 5. \end{array} \qquad (4)$$

De (3): No es necesario formar un par con la ecuación (3) y otra, ya que x no aparece en ella. Se tiene

$$y - z = 3. \qquad (5)$$

Al formar un par con las ecuaciones (4) y (5) se obtiene

$$\begin{aligned} -7y - 6z &= 5 \qquad (4) \\ y - z &= 3. \qquad (5) \end{aligned}$$

Se elige eliminar y:
$$\begin{array}{r} -7y - 6z = 5 \\ 7y - 7z = 21 \\ \hline -13z = 26 \\ z = -2. \end{array}$$

De la ecuación (5) se tiene $y - (-2) = 3$, de donde $y = 1$.
Por último, la ecuación (2) da

$$\begin{aligned} x + 2(1) + 2(-2) &= 0 \text{ o} \\ x + 2 - 4 &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

La solución completa es (2, 1, −2).

Ejercicios

Resolver los sistemas siguientes por el método de eliminación. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. $\begin{aligned} x - y + 2z &= -1 \\ 2x + y - z &= 9 \\ x - 2y - z &= 0 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 7 \\ 3x - 2y - z &= 7 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 3 \\ 2x - y - 3z &= 15 \\ 2x + 2y + 3z &= -3 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 3x + 2z &= 3 \\ x - y - 3z &= 15 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 6 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ x - y - 1 &= 0 \\ 3x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 2x + 3y &= z + 2 \\ 4x - 3y &= 1 - z \\ 2x - 3y &= z - 2 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x + z &= y + 3 \\ 2x + z &= 3 - y \\ 2x - z &= 2y \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 3x + 4y + z - 6 &= 0 \\ 6x - 4y - 2z - 7 &= 0 \\ 3x - 4y - 3z - 4 &= 0 \end{aligned}$

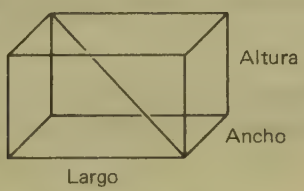
11. $\begin{aligned} 3x - z + 2y &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 8 \\ 3y + 2z + x &= 1 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + y - 7 &= 2z \\ 2x + 2y &= z + 8 \end{aligned}$

*13. De 100 programadores, 2/3 de los que saben Pascal conocen el BASIC, y 3/4 de los que saben BASIC conocen el Pascal. Si hay 12 que no conocen ninguno de los dos lenguajes, ¿cuántos saben ambos?

*14. Una caja rectangular (ver la figura siguiente) tiene dimensiones tales que la suma de la altura y el ancho es 7 cm, la suma del ancho y el largo es 15 cm, y la suma del largo y la altura es 16 cm.

(a) Encontrar el largo, el ancho y la altura de la caja.
(b) ¿Qué distancia hay entre la esquina posterior superior de la izquierda y la esquina frontal inferior de la derecha?



*15. Tres variables se representan utilizando tercetas ordenadas en el espacio con tres ejes. En un sistema de tres ecuaciones con tres variables,

cada ecuación representa un plano. Uno podría imaginarse dos paredes y el suelo como un ejemplo de tres planos que se cortan en un punto.

(a) ¿Qué tipo de figura se forma de la intersección de dos planos?
(b) En un sistema de tres ecuaciones, ¿cuántos pares de ecuaciones pueden formarse?
(c) ¿Por qué sólo se consideran dos pares en la solución de un sistema de tres ecuaciones?

8.3. MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Cuando se usó el método de eliminación para resolver un sistema de tres ecuaciones, había varias opciones para elegir. Podía decidirse cuál de las tres variables iba a eliminarse, y cuáles ecuaciones formarían los pares para terminar el proceso de eliminación. Se optó por la alternativa que facilitaba los cálculos aritméticos. Las consideraciones en el campo de la computación son diferentes.

En una solución de computadora no es necesario tomar en consideración la dificultad de los cálculos aritméticos. El método de computadora más común para resolver un sistema de ecuaciones lineales es una variación del procedimiento de eliminación llamado *eliminación de Gauss con sustitución hacia atrás.* Su nombre es en honor del matemático alemán Carl Friedrich Gauss, aun cuando otros matemáticos lo conocieron antes que él. El método se presenta en esta sección para un sistema de tres ecuaciones con tres variables, aun cuando puede generalizarse para n ecuaciones con m variables.

La idea básica es escribir el sistema como un sistema equivalente que siga el patrón:

$$\begin{aligned} x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ y + c_2 z &= d_2 \\ z &= d_3 . \end{aligned}$$

Es decir, todos los términos en x después del primero se eliminan de las ecuaciones, así como todos los términos en y después del segundo. La sustitución hacia atrás significa que una vez que se tienen

las ecuaciones en esta forma, puede tomarse el valor de z en la tercera ecuación y sustituirlo en la segunda para encontrar el valor de y. Conociendo los valores de y y z, pueden sustituirse, a su vez, en la primera ecuación para encontrar x.

Ejemplo 1

Resolver el siguiente sistema por el método de eliminación de Gauss con sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 && (1)\\ x + 2y + 3z &= 7 && (2)\\ 2x - y + z &= 4. && (3) \end{aligned}$$

Solución

El problema se considerará en cinco fases.

1. En la fase uno, las variables se disponen en el mismo orden en todas las ecuaciones, como es el caso en este problema.
2. En la fase dos se trabaja con la variable x.

   (a) En la ecuación (1) el coeficiente de x es 1. (Si no hubiera sido 1, se habrían dividido ambos miembros de la ecuación por ese coeficiente.) Se utiliza ahora la ecuación (1), $x - 3y + 2z = 5$, para eliminar x de las otras dos ecuaciones.

   (b) Se elimina x de la ecuación (2):

$$\begin{array}{rl} x + 2y + 3z = & 7 \\ -x + 3y - 2z = & -5 \quad (-1 \text{ vez la ecuación (1)}) \\ \hline 5y + z = & 2. \end{array} \qquad (4)$$

   Se elimina x de la ecuación (3):

$$\begin{array}{rl} 2x - y + z = & 4 \\ -2x + 6y - 4z = & -10 \quad (-2 \text{ veces la ecuación (1)}) \\ \hline 5y - 3z = & -6. \end{array} \qquad (5)$$

3. En la fase de la solución se trabaja con la variable y. Se utiliza el sistema como el del final de la fase dos. Es decir, ahora se tiene el sistema

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 && (1)\\ 5y + z &= 2 && (4)\\ 5y - 3z &= -6. && (5) \end{aligned}$$

(a) Se escribe una ecuación que sea equivalente a la ecuación (4) pero que tenga 1 como coeficiente de y. Es decir, se dividen ambos miembros de la ecuación por 5. Se obtiene

$$y + (1/5)z = 2/5. \tag{6}$$

(b) Se usa esta ecuación para eliminar y en la ecuación (5).

$$\begin{array}{rl} 5y - 3z = -6 & \\ -5y - z = -2 & (-5 \text{ veces la ecuación (6)}) \\ \hline -4z = -8 & \end{array} \tag{7}$$

4. En la fase cuatro se trabaja con la variable z. Se usa el sistema como aparece al final de la fase tres. Es decir, se tiene

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 && (1) \\ y + (1/5)z &= 2/5 && (6) \\ -4z &= -8. && (7) \end{aligned}$$

(a) Se escribe una ecuación que sea equivalente a la ecuación (7) pero que tenga 1 como coeficiente de z. Es decir, se dividen ambos miembros de la ecuación entre -4. Se obtiene

$$z = 2. \tag{8}$$

5. En la fase cinco se realizan los pasos de la sustitución hacia atrás. Se usa el sistema como está al final de la fase cuatro. Es decir, el sistema aparece ahora como

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 && (1) \\ y + (1/5)z &= 2/5 && (6) \\ z &= 2. && (8) \end{aligned}$$

(a) El valor $z = 2$ de la ecuación (8) se sustituye en la ecuación (6):

$y + (1/5)(2) = 2/5$ o $y + 2/5 = 2/5$, de donde $y = 0$.

(b) Se sustituyen los valores $z = 2$ y $y = 0$ en la ecuación (1):

$x - 3(0) + 2(2) = 5$ o $x + 4 = 5$, de donde $x = 1$.

La solución final del problema es $(1, 0, 2)$.

Comprobación: $1 - 3(0) + 2(2) = 5$ o $1 + 4 = 5$
$1 + 2(0) + 3(2) = 7$ o $1 + 6 = 7$
$2(1) - 0 + 2 = 4$ o $2 + 2 = 4$.

Dado que pueden seguirse los mismos pasos para cualquier sistema de tres ecuaciones con tres variables, el algoritmo puede adaptarse fácilmente a una computadora.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales simultáneas con tres variables (x, y, z) utilizando el método de Gauss con sustitución hacia atrás:

1. Si las variables no aparecen en el mismo orden en todas las ecuaciones, reordenar los términos a este fin.
2. Se trabaja con x:
   a. Los dos miembros de la segunda ecuación se dividen entre el coeficiente de x. Si este paso implica dividir entre cero, se intercambia la ecuación con una de las dos siguientes.
   b. Usar la ecuación resultante para eliminar x de la segunda y la tercera ecuaciones.
3. Utilizando el sistema que resulta del paso anterior, se trabaja con y:
   a. Los dos miembros de la segunda ecuación se dividen entre el coeficiente de y. Si este paso implica dividir entre cero, se intercambia la ecuación con la siguiente.
   b. Se usa la ecuación resultante para eliminar y de la tercera.
4. Utilizando el sistema que resulta del paso 3, se trabaja con z:
   a. Si este paso implica dividir entre cero, el sistema es dependiente o bien inconsistente.
   b. En caso contrario, se dividen ambos miembros de la tercera ecuación entre el coeficiente de z.
5. Utilizando el sistema que resulta del paso 4, se realiza la sustitución hacia atrás.
   a. Se sustituye el valor de z de la tercera ecuación en la segunda, y se encuentra el valor de y.
   b. Se sustituyen los valores de y y z en la primera ecuación y se encuentra el de x.

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema por el método de eliminación de Gauss con sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y - 3z &= 2 \qquad (1)\\ 3x - \ \ y + 4z &= 9 \qquad (2)\\ 4x + 2y - 3z &= 7. \qquad (3) \end{aligned}$$

Solución

1. Las variables aparecen en el mismo orden en todas las ecuaciones, de modo que puede iniciarse el proceso.
2. (a) La ecuación (1) se divide entre 2:

$$x + (1/2)y - (3/2)z = 1 \qquad (4)$$

(b) Se elimina x de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 3x - y + 4z &= \ \ 9\\ -3x - (3/2)y + (9/2)z &= -3 \quad (-3 \text{ veces la ecuación (4)})\\ \hline -(5/2)y + (17/2)z &= \ \ 6. \qquad (5) \end{aligned}$$

Se elimina x de la tercera ecuación.

$$\begin{aligned} 4x + 2y - 3z &= \ \ 7\\ -4x - 2y + 6z &= -4 \quad (-4 \text{ veces la ecuación (4)})\\ \hline - \qquad 3z &= \ \ 3. \qquad (6) \end{aligned}$$

3. Se considera el sistema resultante

$$\begin{aligned} x + (1/2)y - (3/2)z &= 1 \qquad (4)\\ -(5/2)y + (17/2)z &= 6 \qquad (5)\\ 3z &= 3. \qquad (6) \end{aligned}$$

(a) Al dividir la ecuación (5) entre $-5/2$ (por ejemplo, al multiplicar por $-2/5$) se obtiene

$$y - (17/5)z = -12/5. \qquad (7)$$

(b) La variable y se ha eliminado de la ecuación (6).

4. Se considera el sistema resultante

$$\begin{aligned} x + (1/2)y - (3/2)z &= 1 \qquad (4)\\ y - (17/5)z &= -12/5 \qquad (7)\\ 3z &= 3. \qquad (6) \end{aligned}$$

5. Ambos miembros de la ecuación (6) se dividen entre 3:

$$z = 1 \qquad (8)$$

6. Se considera el sistema resultante

$$\begin{aligned} x + (1/2)y - (3/2)z &= 1 && (4)\\ y - (17/5)z &= -12/5 && (7)\\ z &= 1. && (8) \end{aligned}$$

Se hace la sustitución: $y - (17/5)(1) = -12/5$, o $y - 17/5 = -12/5$, de donde $y = 5/5$ o 1

$$\begin{aligned} x + 1/2(1) - 3/2(1) &= 1, \text{ o}\\ x + 1/2 - 3/2 &= 1\\ x - 2/2 &= 1\\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución final es (2, 1, 1).

Comprobación:
$$\begin{aligned} 2(2) + 1 - 3(1) &= 2 \text{ o } 4 + 1 - 3 = 2\\ 3(2) - 1 + 4(1) &= 9 \text{ o } 6 - 1 + 4 = 9\\ 4(2) + 2(1) - 3(1) &= 7 \text{ o } 8 + 2 - 3 = 7 \end{aligned}$$

De hecho, el problema se ha simplificado demasiado en esta presentación. En una aplicación real de computadora aun el orden de las ecuaciones puede afectar los resultados. Considérese, por ejemplo, una máquina con capacidad para seis dígitos. Cuando la eliminación de Gauss se usa en el sistema

$$\begin{aligned} -10^{-8}x + y &= 1\\ x + y &= 2, \end{aligned}$$

se obtiene la solución (0, 1) después del redondeo. Sin embargo, cuando se invierte el orden de las ecuaciones, se obtiene la solución (1, 1). Este ejemplo deja claro que las matemáticas que se usan realmente en la programación de computadoras se han estudiado sólo superficialmente.

El análisis numérico es la rama de las matemáticas que considera en profundidad estos problemas.

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas por el método de eliminación de Gauss con sustitución hacia atrás. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. $\begin{aligned} x - y + 2z &= -1\\ 2x + y - z &= 9\\ x - 2y - z &= 0 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0\\ x - 3y + 2z &= 7\\ 3x - 2y - z &= 7 \end{aligned}$

3. $2x - 3y + z = 0$
$3x + 2y - z = 4$
$2x - 2y + z = 1$

4. $3x + y + 2z = 3$
$2x - y - 3z = 15$
$2x + 2y + 3z = -3$

5. $3x + 2z = 3$
$x - y - 3z = 15$
$x + y = 0$

6. $x + y - z = 2$
$x - y + z = 4$
$-x + y + z = 6$

7. $2x + 2y + z = 0$
$x - y = 1$
$3x - 3y + 2z = 3$

8. $2x + 3y = z + 2$
$4x - 3y = 1 - z$
$2x - 3y = z - 2$

9. $x + z = y + 3$
$2x + z = 3 - y$
$2x - z = 2y$

10. $3x + 4y + z - 6 = 0$
$6x - 4y - 2z - 7 = 0$
$3x - 4y - 3z - 4 = 0$

11. $3x - z + 2y = 3$
$2x - y + 3z = 8$
$3y + 2z + x = 1$

12. $x + 2y + 2z = 2$
$2x + y - 7 = 2z$
$2x + 2y = z + 8$

⇒13. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que muestre un algoritmo para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables utilizando el método de eliminación de Gauss.

*14. Usar el método de eliminación de Gauss para resolver el sistema

$$-10^{-8}x + y = 1$$
$$x + y = 2.$$

Redondear los valores a seis cifras decimales

*15. Usar el método de eliminación de Gauss para resolver el sistema

$$x + y = 2$$
$$-10^{-8}x + y = 1.$$

Redondear los valores a seis cifras decimales.

*16. El método de eliminación de Gauss suele aplicarse utilizando únicamente los coeficientes de las variables. Por ejemplo,

$2x + 3y = 7$ se escribe $\begin{matrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 4 \end{matrix}$. Haciendo el coeficiente de x igual a 1 en la primera ecuación y eliminando x de la segunda ecuación se obtiene $\begin{matrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & -13/2 & -13/2 \end{matrix}$. Haciendo el coeficiente de y igual a 1 en la segunda ecuación se obtiene

$$\begin{matrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1. \end{matrix}$$

Se obtiene el valor $y = 1$ y la retrosustitución da $x = 2$.
Resolver el problema 1 utilizando únicamente los coeficientes.

8.4. EL MÉTODO GAUSS-SEIDEL

Durante algún tiempo se pensó que las técnicas iterativas eran mejores que el método de eliminación de Gauss, debido a que los efectos del error de redondeo eran menos graves en ellas. Ahora que el problema se ha estudiado con mayor detenimiento, los especialistas en análisis numérico concuerdan en que cuando el método de eliminación de Gauss se aplica correctamente es, en general, el procedimiento idóneo.

Aun cuando la iteración sigue siendo una técnica eficaz para cierto tipo de problemas, en esta sección se presenta el método Gauss-Seidel para un sistema de dos ecuaciones con dos variables como ejemplo de este tipo de solución; este método puede generalizarse para sistemas mayores.

El método Gauss-Seidel es particularmente eficaz para un sistema con varias ecuaciones cuando algunos de los coeficientes son iguales a cero.

Cuando se aplica una técnica iterativa, es importante saber bajo qué condiciones el procedimiento producirá una solución. Con el método Gauss-Seidel se empieza con las variables en el mismo orden en ambas ecuaciones. Es decir, las ecuaciones deberán estar en la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Si $|a_1 b_2| > |b_1 a_2|$, se dice que el método Gauss-Seidel converge a una solución, es decir, después de un número finito de iteraciones se llegará a la solución con el grado de precisión deseado.

Si la condición anterior no se satisface, es posible reordenar las ecuaciones para lograrlo. Si con la reordenación no se consigue la solución, en caso de que ésta exista, entonces se busca utilizando otro método.

La idea básica en que se basa el método Gauss-Seidel es resolver la primera ecuación para x y la segunda para y. Se empieza con una estimación de y y se usa para resolver x. Este valor de x puede usarse para mejorar la estimación de y y así sucesivamente hasta llegar al grado de precisión deseado. A continuación se presenta al algoritmo para hallar la solución.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas con dos variables (x, y) utilizando el método Gauss-Seidel:

1. Las ecuaciones se escriben en la forma: $a_1x + b_1y = c_1$
   $a_2x + b_2y = c_2$.
2. Se verifica la convergencia:
   a. Si $|a_1b_2| > |b_1a_2|$, el método converge a una solución.
   b. Si $|a_1b_2| \leqslant |b_1a_2|$, se reordenan las ecuaciones y se prueba de nuevo.
3. Si el método converge, se resuelve la primera ecuación para x y la segunda para y.
4. Se elige el grado de precisión deseado (décimas, centésimas, milésimas, etc.).
5. Se empieza con un valor estimado de y. No necesita ser preciso. Con frecuencia se usa cero.
6. Se usa la estimación del paso 5 para resolver x en la primera ecuación. Se redondea la solución a la precisión deseada.
7. Se usa el valor (no redondeado) de x del paso anterior para resolver y en la segunda ecuación. Se redondea la solución al grado de precisión deseado.
8. Se usa el valor (no redondeado) del paso 7 para resolver x en la primera ecuación. Se redondea la solución al grado de precisión deseado.
9. Se repiten los pasos 7 y 8 hasta obtener dos veces consecutivas tanto el mismo valor redondeado de x como el de y (o hasta que la diferencia entre dos valores sucesivos sea menor que cierta cantidad predeterminada).

Ejemplo 1

Resolver, si es posible, por el método Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 2y &= -5. \end{aligned}$$

Solución

1. Las ecuaciones están en la forma correcta.
2. Se verifica la convergencia: puesto que $|2(2)| > |1(-1)|$, el método converge.
3. Se resuelve la primera ecuación para x: $2x = y + 5$, de donde $x = (y + 5)/2$.
   Se resuelve la segunda ecuación para y: $2y = -x - 5$, de donde $y = (-x - 5)/2$.

4. Se quiere la solución con aproximación de centésimas.
5. Se empieza con $y = 0$ como primera estimación.
6. Cuando $y = 0$, la primera ecuación da $x = 5/2 = 2.5$.
7. Cuando $x = 5/2$, la segunda ecuación da $y = (-2.5 - 5)/2$ o $-7.5/2 = -3.75$.
8. Cuando $y = -3.75$, la primera ecuación da $x = (-3.75 + 5)/2$ o $(1.25)/2 = 0.625$, que se redondea a 0.63.
9. (a) Cuando $x = 0.625$, $y = (-0.625 - 5)/2 = (-5.625)/2 = -2.8125$, que se redondea a -2.81.
   (b) Cuando $y = -2.8125$, $x = (-2{,}8125 + 5)/2 = 1.09375$, que se redondea a 1.09.

En la tabla siguiente se presentan los resultados anteriores así como los valores que se obtienen al continuar el proceso. El número de la iteración está dado por n.

n	x	y	
0		0	
1	2.5	−3.75	
2	0.63	−2.81	
3	1.09	−3.05	
4	0.98	−2.99	
5	1.01	−3.00	
6	1.00	−3.00	(El valor de y se repite, el de x no)
7	1.00	−3.00	(Los valores de x y y se repiten)

Se llega a la conclusión de que, aproximando a centésimas, $x = 1.00$ y $y = -3.00$.

Comprobación: $2(1.00) - (-3.00) = 5$ o $2 + 3 = 5$
$1.00 + 2(-3.00) = -5$ o $1 - 6 = -5$.

Ejemplo 2

Resolver, si es posible, por el método Gauss-Seidel:

$$x + 2y = 1$$
$$7x + y = 2.$$

Solución

1. Las ecuaciones están en la forma correcta.
2. $|1(1)| \leqslant |2(7)|$, por lo que las ecuaciones se reordenan

$$7x + y = 2$$
$$x + 2y = 1$$

$|2(7)| > |1(1)|$, por lo que el método convergerá a una solución.

3. $x = (-y + 2)/7$
   $y = (-x + 1)/2$
4. Se quiere la solución con una aproximación de milésimas.
5. Se empieza con una estimación inicial de $y = 0$.

6-9. En la tabla siguiente se presentan los resultados del procedimiento de iteración.

n	x	y	
0		0	
1	0.286	0.357	
2	0.235	0.383	
3	0.231	0.384	
4	0.231	0.385	(El valor de x se repite, el de y no)
5	0.231	0.385	(Los valores de x y y se repiten)

Se concluye que $x = 0.231$ y $y = 0.385$, con aproximación de milésimas. Puesto que estos valores son soluciones aproximadas, es posible que al hacer la comprobación se encuentre cierta discrepancia con las ecuaciones originales.

Comprobación: $0.231 + 2(0.385) = 1$ o $0.231 + 0.77 = 1.001$
$7(0.231) + 0.385 = 2$ o $1.617 + 0.385 = 2.002$.

Ejemplo 3

Resolver, si es posible, por el método Gauss-Seidel:

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1.$$

Solución

1. Las ecuaciones están en la forma correcta.
2. Puesto que $|1(-1)| \leqslant |1(1)|$, se reordenan las ecuaciones

$$x - y = 1$$
$$x + y = 5.$$

Puesto que $|1(1)| \leqslant |9(-1)|$, se concluye que el método Gauss-Seidel no convergerá a una solución para este sistema de ecuaciones. Es importante observar que no se ha dicho que el sistema del ejemplo 3 no se puede resolver. La solución es (3, 2), pero debe obtenerse con otro método, como el de eliminación.

Ejemplo 4

Resolver, si es posible, por el método Gauss-Seidel:

$$2x - 4y = 6$$
$$-2x + 4y = 7.$$

Solución

1. Las ecuaciones están en la forma correcta.
2. Como $|2(4)| \leqslant |-2(-4)|$, se reordenan las ecuaciones

$$\begin{aligned} -2x + 4y &= 7 \\ 2x - 4y &= 6 \end{aligned}$$

Puesto que $|-2(-4)| \leqslant |2(4)|$, el método Gauss-Seidel no convergerá a una solución.

Obsérvese que el sistema del ejemplo 4 no tiene solución. El sistema es inconsistente.

Ejercicios

Encontrar, si es posible, las soluciones aproximadas a centésimas de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método Gauss-Seidel. Ver los ejemplos 1 al 4.

1. $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 3x - y &= 7 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x - y &= 12 \\ 3x + 5y &= 10 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 10x + 6y &= 8 \\ 5x + 3y &= 4 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 6x - 4y &= -1 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x + 4y &= 9 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3x &= y + 2 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x &= y - 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x + 3y - 5 &= 0 \\ 3x + y - 5 &= 0 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 2y + x &= 6 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 3x - y &= 8 \\ 4x + 2y &= 11 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x + 3y &= 3 \\ 4x + 2y &= 11 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 2x - 3y &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 4x + 6y &= 7 \\ 6x - 9y &= 5 \end{aligned}$

***16.** Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que muestre el algoritmo para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables utilizando el método Gauss-Seidel.

***17.** Intentar usar el método Gauss-Seidel en el siguiente sistema sin cambiar el orden de las ecuaciones: $\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x + y &= 2. \end{aligned}$

*18. El método Gauss-Seidel puede aplicarse en un sistema de n ecuaciones con n variables para $n > 2$. El método converge si el sistema es de "diagonal dominante en renglón", es decir que cuando las ecuaciones se escriben con las variables en el mismo orden, el coeficiente de la i-ésima variable en la i-ésima ecuación (para toda i) es mayor en valor absoluto que la suma de los valores absolutos de los coeficientes de las demás variables en ese renglón. El método consiste en resolver la i-ésima ecuación para la i-ésima variable para toda i. Se empieza asignando valores (con frecuencia 0) a las variables que no sean la primera, a fin de resolver la primera ecuación para la primera variable. (Si el sistema no es diagonalmente dominante en renglón, el método puede o no converger.)

(a) Resolver, si es posible, por el método Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 5 \\ x + 3y + z &= 3 \\ x - y - 3z &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - 2z &= 6 \\ 2y + z &= 2 \\ 2x + y &= 6, \end{aligned}$$

8.5. REGLA DE CRAMER

Si un sistema de ecuaciones se escribe de tal modo que las variables se presenten en el mismo orden en todas las ecuaciones, la solución puede obtenerse trabajando con los coeficientes. A fines del siglo XVII Gottfried Wilhelm von Leibniz, en Alemania, y Seki Kowa, en Japón, descubrieron independientemente tal método. Sin embargo, su descubrimiento no tuvo un uso generalizado sino hasta 1750, cuando Gabriel Cramer, de Suiza, lo redescubrió y popularizó. El método se conoce hoy como la "regla de Cramer".

La regla de Cramer se basa en el concepto de determinante, que se define a continuación.

Definición

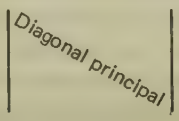
Un determinante $n \times n$ es un número representado por un arreglo (o disposición) de n^2 números.

Se acostumbra usar un par de barras en el arreglo para indicar que los números deben considerarse como tal y no como números individuales.

Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ es un determinante 2×2.

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ es un determinante 3 × 3.

Se dice que los números que están sobre la recta que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha están sobre la *diagonal principal.* Esta diagonal principal se usa al evaluar un determinante.



La evaluación de un determinante 2 × 2 es más sencilla que la de un determinante 3 × 3, por lo que primero se considera el determinante inicial.

Para evaluar un determinante 2 × 2:

1. Se forma el producto de los números de la diagonal principal.
2. Se forma el producto de los números de la otra diagonal (de la esquina superior derecha a la inferior izquierda).
3. Se resta el producto encontrado en el paso 2 menos el resultado del paso 1.

Ejemplo 1

Evaluar $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ & \diagdown \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$5(2) \qquad - \qquad (-1)(-5)$$

↑ {de la diagonal principal} ↑ resta ↑ {de la otra diagonal}

$10 - 5 = 5$, por lo que el valor del determinante es 5.

Ejemplo 2

Evaluar $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

Solución

$2(2) - (-1)(-5) = 4 - 5 = -1$, por lo que el valor del determinante es -1.

Para evaluar un determinante 3×3 se copian las dos primeras columnas en seguida del determinante original. Resultan dos diagonales inversas completas (i.e., con tres números) paralelas a la diagonal principal. Se encuentra el producto de los números de cada una de estas diagonales inversas así como el producto de los 3 números de cada una de las diagonales directas.

Para evaluar un determinante 3×3:

1. Se copian las dos primeras columnas a la derecha del determinante original.
2. Se encuentra el producto de los números de la diagonal inversa principal y de cada una de las diagonales paralelas a ella. Se suman estos productos.
3. Se encuentra el producto de los 3 números de cada una de las demás diagonales directas. Se suman estos productos.
4. Se resta la suma encontrada en el paso 3 de la suma resultante del paso 2.

Este procedimiento se conoce como la regla de Sarrus.

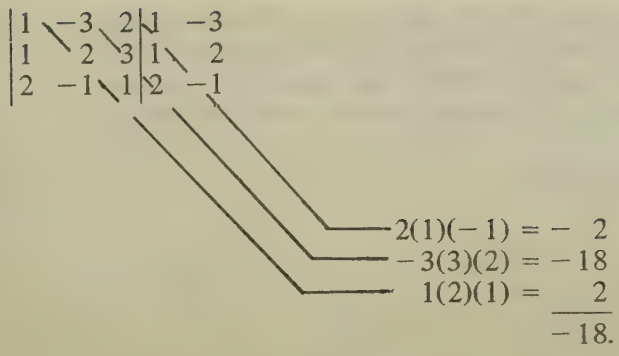
Ejemplo 3

Evaluar $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

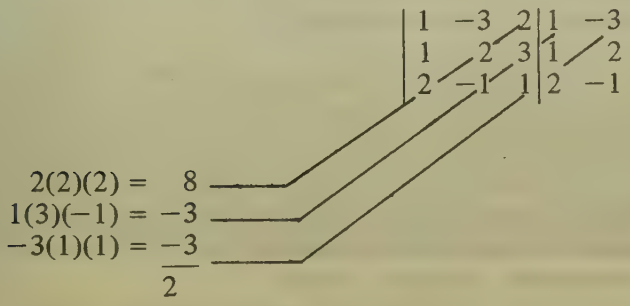
Solución

Se escribe $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Utilizando la diagonal principal y las diagonales paralelas a ella se obtiene:



Utilizando las otras diagonales se obtiene:

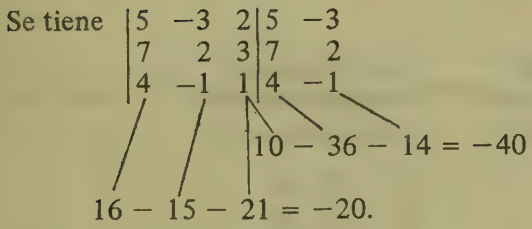


El valor del determinante es $-18 - 2 = -20$.

Ejemplo 4

Evaluar $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Solución



El valor del determinante es $-40 - (-20) = -40 + 20 = -20$.

La regla de Cramer establece que el valor de cada variable de un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse como un cociente de

determinantes. Las variables tendrán el mismo denominador, pero el numerador será diferente para cada una de ellas. Primero se escriben las ecuaciones de modo que las variables aparezcan en el mismo orden en todas las ecuaciones, con el término constante en el segundo miembro.

Por ejemplo, considérese el sistema

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 7 \\ 2x - y + z &= 4. \end{aligned}$$

Las tres variables tendrán el mismo denominador. Éste es el determinante formado al enlistar los coeficientes de x en la primera columna, los coeficientes de y en la segunda, y los coeficientes de z en la tercera. Por tanto, el denominador es el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Para encontrar x se sustituye la primera columna (la columna de x) por las constantes del segundo miembro de la ecuación, para formar el determinante que es el numerador. Es decir, se tiene

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Para encontrar y se sustituye la segunda columna (la columna de y) por las constantes; y para encontrar z se sustituye la tercera columna (la columna de z) por las constantes. Se obtiene

Las constantes reemplazan a los coeficientes de x	Las constantes reemplazan a los coeficientes de y	Las constantes reemplazan a los coeficientes de z

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales simultáneas por la regla de Cramer:

1. Si las variables no aparecen en el mismo orden en todas las ecuaciones, reordenar los términos.
2. Cada variable está dada como el cociente de dos determinantes.
   a. El determinante del denominador tiene los coeficientes de la primera variable (en orden) como primera columna, los coeficientes de la segunda variable (en orden) como segunda columna, y así sucesivamente.
   b. El determinante del numerador es igual al denominador, excepto por los números de la columna correspondiente a la variable buscada. Esa columna se reemplaza por las constantes.
3. Se evalúan los determinantes. Si la solución produce un denominador cero, pero alguno de los numeradores tiene un valor diferente, el sistema es inconsistente. Si el sistema es dependiente, todos los numeradores y el denominador serán iguales a cero.

Ejemplo 5

Usar la regla de Cramer para resolver: $2x - y = 5$
$x + 2y = -5.$

Solución

Se tiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}.$$

Al evaluar los determinantes se obtiene

$$x = \frac{10 - (5)}{4 - (-1)} = \frac{10 - 5}{4 + 1} = \frac{5}{5} = 1,$$

$$y\, y = \frac{-10 - 5}{4 - (-1)} = \frac{-15}{5} = -3.$$

Comprobación: $2(1) - (-3) = 5$ o $2 + 3 = 5$
$1 + 2(-3) = -5$ o $1 + (-6) = -5$

Ejemplo 6

Usar la regla de Cramer para resolver:
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 1 \\ 2x + 2y - z &= 2. \end{aligned}$$

Solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}.$$

Se evalúa el determinante del denominador:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = (1 + 2 + 8) - (-4 + 2 - 2)$$
$$= 11 - (-4) = 15.$$

El numerador de x es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = (1 + 2 + 4) - (-4 + 2 - 1)$$
$$= 7 - (-3) = 10.$$

El numerador de y es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = (-1 + 2 + 8) - (4 + 2 - 2) = 9 - 4 = 5.$$

El numerador de z es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = (-2 + 2 + 4) - (-2 + 2 + 4) = 4 - 4 = 0.$$

Por tanto se tiene $x = 10/15 = 2/3$, $y = 5/15 = 1/3$, y $z = 0/15 = 0$.

Comprobación:
$$\begin{aligned} 2/3 + 1/3 + 2(0) &= 1 \text{ o } 2/3 + 1/3 = 1 \\ 2(2/3) - 1/3 + 0 &= 1 \text{ o } 4/3 - 1/3 = 1 \\ 2(2/3) + 2(1/3) - 0 &= 2 \text{ o } 4/3 + 2/3 = 2. \end{aligned}$$

El método para evaluar determinantes estudiado en esta sección no puede generalizarse a determinantes con dimensiones mayores de 3×3. La regla de Cramer no es un método adecuado para aplicarlo en una computadora, pero existen métodos más generales (ver el problema 27 de los ejercicios siguientes). Considérese un sistema de 12 ecuaciones con 12 variables (no raro en la práctica); la regla de Cramer requeriría la evaluación de 13 determinantes. Habría más de 6×10^9 términos, cada uno obtenido por 11 multiplicaciones, es decir, habría casi 7×10^{10} multiplicaciones. Una computadora con capacidad para realizar 100 000 multiplicaciones por segundo operando 24 horas diarias, requeriría más de una semana para resolver el sistema. En cambio, el método de eliminación de Gauss requeriría 794 multiplicaciones y tomaría unos 0.008 segundos. Además, los efectos del error de redondeo son más graves con la regla de Cramer.

Ejercicios

Evaluar los determinantes siguientes. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$

Evaluar los determinantes siguientes. Ver los ejemplos 3 y 4.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
10. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Usar la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Ver el ejemplo 5.

11. $\begin{aligned} x + y &= 8 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$
12. $\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 4x - y &= 1 \end{aligned}$
13. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$
14. $\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x + 6y &= 7 \end{aligned}$
15. $\begin{aligned} 2x - 5y &= 10 \\ 4x - 10y &= 20 \end{aligned}$
16. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned}$
17. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \\ x - 5y &= 9 \end{aligned}$

Usar la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Ver el ejemplo 6.

18. $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 4 \\ 2x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ x - y &= 1 \\ 3x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 6 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 2y + z &= -1 \\ 2x + 6y - 4z &= 3 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 2x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ x + 3y - z &= -1 \\ x + y + 4z &= 1 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 2x + y - z &= 4 \\ x - 3y + z &= -3 \\ 4x + 2y - 2z &= 8 \end{aligned}$

*25. Cuando se traza un triángulo en un plano cartesiano de tal modo que sus vértices estén en (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), su área está dada por

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(a) Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son (0, 0), (4, 5) y (2, 7).

(b) Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son (2, −5), (6, 2) y (4, 1).

*26. (a) Evaluar $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

(b) Intercambiar dos renglones y evaluar. ¿En qué forma se afecta el determinante?

(c) Evaluar $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

donde los números del renglón i son los que estaban en la columna i de determinante del inciso (a). ¿Cómo se afecta el determinante por este cambio?

*27. Con frecuencia, se usa un subíndice doble para indicar el renglón y la columna de un elemento particular de un determinante. Por ejemplo, a_{11} indica el elemento del primer renglón y la primera columna, mientras que a_{23} indica el elemento del segundo renglón y la tercera columna. Un método general para evaluar determinantes mayores de 2 × 2 se conoce como la regla de Chio. Si A es un determinante $n \times n$ con $a_{11} \neq 0$, entonces $A = 1/(a_{11})^{n-2} B$, donde B es el determinante $(n-1) \times (n-1)$ cuyos elementos son:

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1(j+1)} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}.$$

Con un poco de práctica podrá verse el patrón usado para localizar los elementos de cada b_{ij}, y dado que la evaluación de los determinantes 2×2 es casi inmediata, B podrá escribirse fácilmente usando la regla de Chio. Después la regla de Chio puede aplicarse a B para obtener un determinante $(n-2) \times (n-2)$, y así sucesivamente.
Considérese el ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1/4 \begin{vmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/4 & 32 & -4 \\ & 8 & 8 \end{vmatrix} =$$

$(1/4)(256 + 32) = (1/4)(288) = 72.$

Usar la regla de Chio para evaluar:

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

*28. Cuando se usa la regla de Chio (ver el problema 27) para reducir un determinante $n \times n$ a un determinante $(n-1) \times (n-1)$, ¿cuántos determinantes 2×2 deben evaluarse?

8.6. MATRICES

Otro método para resolver un sistema de ecuaciones lineales comprende el uso de ecuaciones matriciales. Debido a la importancia del álgebra de matrices en aplicaciones de programación de computadora en economía, física atómica y estadística, este método se presenta como una introducción a la rama de las matemáticas conocida como *álgebra lineal.*

El término *matriz* fue introducido en 1850 por el matemático J.J. Sylvester. Él quería referirse a un arreglo de números como un solo

* Miller, Eldon. "Evaluating an Nth Order Determinant in N Easy Steps", *The MATYC Journal*, vol. 12, núm. 2 (primavera de 1978), págs. 123-128.

objeto, pero no pudo usar la palabra *determinante* porque el arreglo no tenía un valor. Con el tiempo las matrices llegaron a ser más importantes que los determinantes en el estudio de las matemáticas. Para distinguir una matriz de un determinante se usan paréntesis cuadrados en lugar de las barras.

Definición

Una matriz $m \times n$ es un arreglo (o disposición) rectangular de números con m renglones (horizontales) y n columnas (verticales).

Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, es una matriz 2×3, y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ es una matriz 3×2.

Los elementos de una matriz suelen escribirse utilizando subíndices dobles. La notación a_{ij} representa el elemento del renglón i y la columna j. En matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $a_{12} = -2$ y $a_{23} = 6$.

Si se quieren sumar dos matrices, ambas deben tener las mismas dimensiones (por ejemplo, el mismo número de renglones y de columnas), y se suman los "elementos correspondientes", es decir, los que tienen el mismo número de renglón y de columna.

Para sumar dos matrices (A y B) con las mismas dimensiones:

Se suma cada elemento a_{ij} de la matriz A con el elemento correspondiente b_{ij} de la matriz B para obtener el elemento c_{ij} de la suma.

La diferencia de matrices puede hacerse si se restan los elementos correspondientes.

Ejemplo 1

Sumar, si es posible: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + -4) & (2 + 5) \\ -3 & 7 \\ -1 & -3 \\ (0 + -1) & (-3 + 0). \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Restar, si es posible: $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

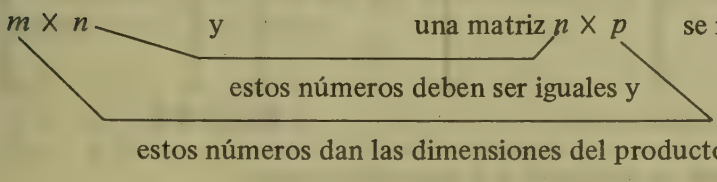
Ejemplo 3

Sumar, si es posible: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución

La adición no está definida. La primera matriz es 3×2, mientras que la segunda es 2×3.

Para multiplicar dos matrices, la primera debe tener exactamente tantas columnas como renglones tenga la segunda. El producto de una matriz $m \times n$ y una matriz $n \times p$ es una matriz $m \times p$. Es decir, cuando una matriz



Por tanto, es posible multiplicar una matriz 2×3 y una 3×2, pero no una matriz 2×3 y una 2×3.

El elemento correspondiente al renglón i, columna j del producto se obtiene multiplicando los elementos del renglón i de la primera matriz por los elementos de la columna j de la segunda, y sumando estos productos. La figura 8 puede ayudar a explicar el proceso.

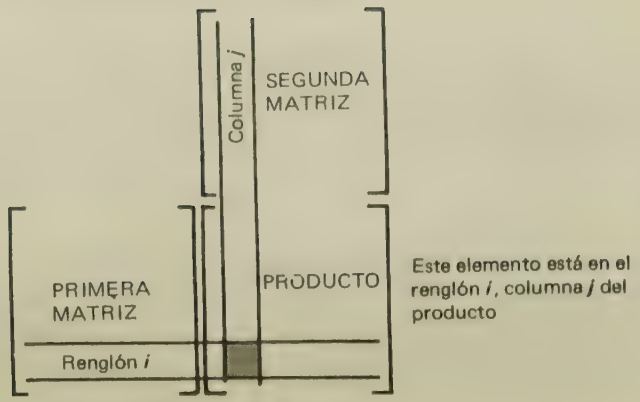


Figura 8.2

Considérese el producto de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Para ilustrar el caso, las matrices se acomodan como en la figura 8.2.

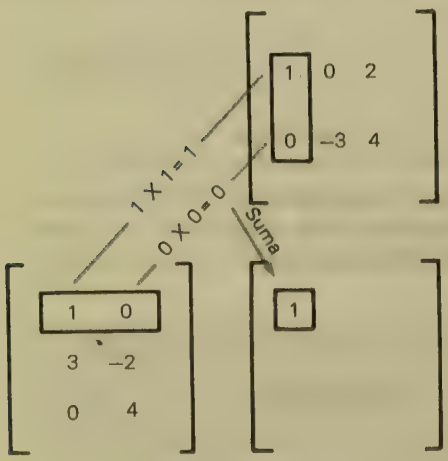


Figura 8.3

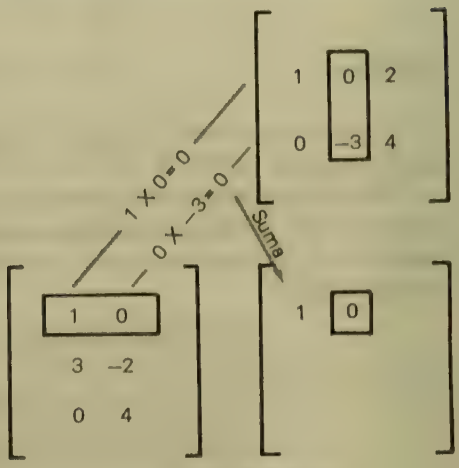


Figura 8.4

Al separar la primera matriz en renglones y la segunda en columnas, puede encontrarse cada elemento de la matriz 3 × 3 que corresponde al producto (ver figuras 8.3 y 8.4). El resultado final es la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1(1) + 0(0) & 1(0) + 0(-3) & 1(2) + 0(4) \\ 3(1) + (-2)(0) & 3(0) + (-2)(-3) & 3(2) + (-2)(4) \\ 0(1) + 4(0) & 0(0) + 4(-3) & 0(2) + 4(4) \end{bmatrix} \text{ o sea}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & -12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4

Multiplicar $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución

Se separa la primera matriz en renglones y la segunda en columnas.

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1(2) + (-2)(0) & 1(3) + (-2)(1) \\ 0(2) + 3(0) & 0(3) + 3(1) \end{bmatrix}$$

y el producto es $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 5

Mutliplicar $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución

Se tiene $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 0+3 \\ 4+0 & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Es interesante observar que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & -12 & 16 \end{bmatrix}$$ pero cuando se invierte

el orden, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$.

Aun cuando las dimensiones sean las mismas, el orden afecta el producto. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix} \text{ pero } \begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

En adelante, en los ejemplos sólo se considerarán matrices cuadradas. Una matriz cuadrada es aquella que tiene el mismo número de renglones y columnas. Una matriz $n \times n$ con "unos" en la diagonal principal y "ceros" en los elementos restantes se le llama *identidad* en el caso de las matrices $n \times n$. Cuando el producto de dos matrices es la identidad, cada una de ellas es la *inversa* de la otra. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix}7 & -1\\ -6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 6 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

y se dice que las matrices $\begin{bmatrix}7 & -1\\ -6 & 1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$ son inversas.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3 & -3/2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$ por lo que las dos matrices que se multiplicaron son inversas.

Cuando los dos factores de una multiplicación de matrices son inversos, o cuando uno de los factores es la matriz identidad, la multiplicación es conmutativa, pero recuérdese que, en general, la multiplicación de matrices no tiene esta propiedad.

En programación de computadoras, a una variable con subíndices se le llama matriz. Una matriz 12×31, por ejemplo, podría almacenar el ingreso diario de una empresa durante un año; los subíndices podrían indicar el mes y el día. Una entrada de 340 en la posición (3, 15) indicaría que el día quince de marzo la empresa tuvo un ingreso de $340.

Ejercicios

Efectuar, si es posible, las siguientes sumas y restas de matrices. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 3\\ 7 & -5\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}12 & 5\\ -3 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & -2\\ 1 & 7\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ 4 & 2 & -9 \\ -6 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 7 & -7 & 8 \\ -5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 0 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 9 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

Efectuar, si es posible, las siguientes multiplicaciones de matrices. Ver los ejemplo 4 y 5.

9. $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3/2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3/2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

⇒25. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que muestre un algoritmo para sumar dos matrices $n \times n$.

⇒26. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que muestre un algoritmo para multiplicar dos matrices $n \times n$.

*27. Se dice que una matriz cuadrada es *mágica* si la suma de los elementos en cualquier renglón, columna o diagonal es igual a la suma de cualquier otro renglón, columna o diagonal. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$ es una matriz cuadrada mágica.

(a) Formar, si es posible, una matriz cuadrada mágica tal que la suma de cada renglón, columna o diagonal sea 18.

(b) Formar, si es posible, una matriz cuadrada mágica 3×3 utilizando los dígitos del 1 al 9 de tal modo que cada dígito se use una sola vez.

*28. Un microcircuito de memoria de 64 K es una disposición cuadrada de celdas para almacenar datos en 256 renglones y 256 columnas. Cada celda puede almacenar un bit.

(a) ¿Cuántas celdas hay en un microcircuito de 64 K?

(b) K es abreviatura de *kilo*. En aplicaciones de computación, kilo significa 1024 (o 2^{10}) en vez de 1000. Usar potencias de 2 para verificar que $256 \times 256 = 64\,(1024)$.

(c) ¿Cuántos renglones y columnas esperarían encontrarse en un microcircuito de 256 K?

*29. Se acostumbra especificar el tamaño de la memoria de una computadora en *bytes*. Por lo general, un byte consta de ocho bits – uno de cada uno de ocho microcircuitos diferentes.

(a) ¿Cuántos microcircuitos de 64 K se necesitarían para almacenar 64 bytes (el número aproximado que se requiere para un programa de procesamiento de palabras)?

(b) ¿Cuántos microcircuitos de 64 K se necesitarían para almacenar 256 bytes?

(c) ¿Cuántos microcircuitos de 256 K se necesitarían para almacenar 256 bytes?

*30. Se puede tener acceso a cada byte individual especificando una "dirección". Las direcciones suelen darse en notación hexadecimal. La memoria de una popular microcomputadora está dividida en tres categorías:

La RAM (Memoria de Acceso Aleatorio) ocupa de 0 a OBFFF (sistema hexadecimal).

La I/O (lugares de Entrada/Salida) ocupa de C000 a CFFF.
La ROM (Memoria de Sólo Lectura) ocupa de D000 a FFFF.

(a) ¿Cuántos bytes se asignan a cada categoría?
(b) ¿Cuáles son las direcciones de las categorías en notación decimal?

8.7. MATRICES INVERSAS Y ECUACIONES MATRICIALES

En la sección anterior se trataron varios ejemplos de matrices que son inversas entre sí. En esta sección se verá cómo encontrar la inversa de una matriz.

Para encontrar la inversa de una matriz, se escriben ésta y la matriz identidad consecutivamente. Para facilitar los cálculos, las dos matrices pueden incluirse en un par de paréntesis cuadrados. Por ejemplo, para encontrar la inversa de

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ se escribe } \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Cuando se cambie la matriz de la izquierda al interior de la identidad, esta última se transformará en la inversa de la matriz de la izquierda. La transformación se hace en dos fases: la primera consiste en cambiar la primera columa a $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$; la segunda en cambiar la segunda columna a $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$. Al elemento reemplazado por 1 en cada fase se le llama el *pivote*. Es importante cambiar el pivote a 1 como primer paso en ambas fases, de manera que pueda usarse para reemplazar los demás elementos de la columna por ceros. Considérese el ejemplo siguiente.

Fase 1: El 2 de la primera columna es el pivote. Quiere reemplazarse por uno, de modo que se dividen por dos los elementos de ambos renglones. Se obtiene $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ & & & \end{array}\right]$.

Ahora puede usarse este renglón para remplazar el último renglón con uno que tenga un 0 como primer elemento. Se necesita sumar -1 al primer $+1$ de ese renglón, por lo que se multiplica el renglón del pivote por -1.

Se tiene

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 3 & 0 & 1 & \text{(el renglón que se quiere cambiar)} \\ -1 & -5/2 & -1/2 & -0 & (-1 \times \text{ el renglón del pivote}) \\ \hline 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & \text{(la suma).} \end{array}$$

La suma de estos dos renglones reemplaza al segundo renglón. Se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right].$$

Puesto que la primera columna tiene ahora la forma deseada, la fase 1 ha terminado, y se usa esta matriz para la fase 2.

Fase 2: Primero se encuentra un nuevo pivote. El elemento 1/2 de la segunda columna es el pivote de la fase 2 y se quiere cambiar a 1. Todos los elementos del renglón se dividen entre 1/2 (o se multiplican por 2) para obtener $\left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora puede usarse este renglón para reemplazar los 5/2 de la segunda columna por 0. Se tiene

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \text{ (el renglón que se quiere cambiar)} \\ -0 & -5/2 & +5/2 & -5 \text{ } (-5/2 \times \text{ el renglón del nuevo pivote}) \\ \hline 1 & 0 & 3 & -5 \text{ (la suma).} \end{array}$$

La suma de estos dos renglones reemplaza al primer renglón. Se tiene $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ & & & \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$. Puesto que la segunda columna está en la forma deseada, se ha terminado la fase 2. De hecho, la solución está completa, ya que se tiene la matriz identidad a la izquierda, lo cual significa que la matriz de la derecha $\left[\begin{array}{cc} 3 & -5 \\ & \\ -1 & 2 \end{array}\right]$ es la inversa de $\left[\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ & \\ 1 & 3 \end{array}\right]$. Puede comprobarse que estas dos matrices son inversas entre sí verificando que su producto sea la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Es posible generalizar este ejemplo para enunciar un algoritmo y encontrar la inversa de cualquier matriz $n \times n$ para la cual exista la inversa.

Para encontrar la inversa de una matriz cuadrada:

1. Se escriben la matriz y la matriz identidad en forma consecutiva.
2. Se transforma la matriz en la matriz identidad trabajando con una columna a la vez. Se repiten los pasos a y b para cada columna.
   a. Se cambia el pivote a 1, es decir, todos los elementos del renglón donde aparezca el pivote se dividen entre éste.
   b. Se cambian los elementos que estén arriba o abajo del pivote por 0, es decir, se multiplica cada elemento del renglón del pivote por el inverso aditivo del elemento que se cambiará. Se suma el resultado al renglón donde aparezca el elemento que se cambiará. Se reemplaza ese renglón con la suma.
3. Cuando la matriz original de la izquierda se haya reemplazado por la matriz identidad, la de la derecha será la inversa de la matriz original.

Ejemplo 1

Encontrar la inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Fase 1: Se divide el primer renglón entre dos para obtener el primer renglón. Se tiene

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{1/2} & \mathbf{-3/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & -5/2 & 17/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{matrix}\text{(Éste es el renglón del pivote)} & (4)\\ \text{(Renglón (2) + (}-3\text{) } \times \text{ renglón del pivote)} & (5)\\ & \\ & \\ \text{(Renglón (3) + (}-4\text{) } \times \text{ renglón del pivote)} & (6)\end{matrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3/2 & 9/2 & -3/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5/2 & 17/2 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 4 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1. \end{array}$$

Fase 2: Se divide el segundo renglón de la fase 1 entre $-5/2$ (o se multiplica por $-2/5$) para obtener el *segundo renglón* de la fase 2. Este renglón $(0 \quad 1 \quad -17/5 \quad 3/5 \quad -2/5 \quad 0)$ es el nuevo renglón del pivote. Se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-17/5} & \mathbf{3/5} & \mathbf{-2/5} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \text{(Renglón (4) + } (-1/2) \times \text{ renglón del pivote)} & \mathbf{(8)} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 1/2 & -3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -0 & -1/2 & 17/10 & -3/10 & 1/5 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \end{array} & \\ \text{(El renglón del pivote)} & \mathbf{(7)} \\ \text{(El renglón (6) no cambia)} & \mathbf{(9)} \end{array}$$

Se usa esta matriz para la fase 3.

Fase 3: Se divide el tercer renglón de la fase 2 entre 3 para obtener el *tercer renglón* de la fase 3. Este renglón $(0 \quad 0 \quad -2/3 \quad 0 \quad 1/3)$ es el renglón del pivote. Se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/5 & -1/15 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & -2/5 & 17/15 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2/3} & \mathbf{0} & \mathbf{1/3} \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \text{(Renglón (8) + } (-1/5) \times \text{ renglón del pivote)} & \mathbf{(11)} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/15 & 0 & -1/15 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/5 & -1/15 \end{array} & \\ \text{(Renglón (7) + } 17/5 \times \text{ renglón del pivote)} & \mathbf{(12)} \\ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -17/5 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 17/5 & -34/15 & 0 & 17/15 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -5/3 & -2/5 & 17/15 \end{array} & \\ \text{(Éste es el renglón del pivote).} & \mathbf{(10)} \end{array}$$

La fase 3 está completa, de donde la inversa de

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ es } \begin{bmatrix} 1/3 & 1/5 & -1/15 \\ -5/3 & -2/5 & 17/15 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Estas dos matrices son inversas entre sí, lo cual puede comprobarse verificando que su producto es la matriz identidad.

Si el número de la posición del pivote resulta ser cero, es imposible dividir entre 0 para cambiarlo a 1. Sin embargo, es permisible cambiar el orden de los renglones. Así, para no perder el trabajo que ya se ha realizado, deben intercambiarse el renglón disfuncional con el que está abajo de él.

Ejemplo 2

Encontrar la inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Solución

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fase 1: Puesto que 0 está en la posición del pivote, y no es posible dividir entre 0, se intercambian los renglones.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Fase 1: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} (1/3 \times (\text{Renglón } 1)) & (3) \\ (\text{El renglón } (2) \text{ no cambia}) & (4) \end{matrix}$

Fase 2: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} (\text{Renglón } (3) + (-1/3) \times \text{Renglón } (5)) & (6) \\ (1/2 \times \text{Renglón } (4)) & (5) \end{matrix}$

De donde $\begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Algunas matrices no tienen inversa, por lo que aun después de intercambiar renglones en esas matrices, no se encuentra.

Ejemplo 3

Encontrar, si existe, la inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Fase 1: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} (\text{Renglón del pivote}) & (4) \\ (\text{El renglón } (2) \text{ no cambia}) & (5) \\ (\text{Renglón } (3) + \text{renglón del pivote}) & (6) \end{matrix}$

Fase 2: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} (\text{Renglón } (4) + \text{renglón del pivote}) & (8) \\ (\text{Renglón del pivote}) & (7) \\ (\text{El renglón } (6) \text{ no cambia}) & (9) \end{matrix}$

Fase 3: Un cero aparece en la posición del pivote, y ya no hay renglones abajo del (9) para hacer el intercambio. Pudo preverse este problema al final de la fase 1. De haber sido así, no era necesario llegar hasta la fase 2.

Pueden usarse matrices para resolver un sistema de ecuaciones, aun cuando es un método que rara vez se usa en computadoras. Considérese la ecuación $AX = B$, donde A, B y X son matrices. Si ambos miembros se multiplican por la inversa de A (denotada por A^{-1}), se tiene $A^{-1}\,AX = A^{-1}\,B$.
Como $A^{-1}\,A$ = la matriz identidad, I,
se tiene $IX = A^{-1}\,B$.

Pero $IX = X$, de donde $X = A^{-1}\,B$.

Un sistema de n ecuaciones con n variables puede escribirse en forma de matriz. A es la matriz cuadrada, y sus elementos son los coeficientes de las variables del sistema; la matriz X es una sola columna, y sus elementos son las variables del sistema, y la matriz B es una sola columna, y sus elementos son las constantes del sistema. Recuérdese que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. Por tanto, si se usa el factor A^{-1} como primer factor en el primer miembro de la ecuación, también debe usarse A^{-1} como primer factor en el segundo miembro.

Para resolver un sistema de n ecuaciones con n variables usando ecuaciones matriciales:

1. Si las varibles no están en el mismo orden en todas las ecuaciones, escribir un sistema equivalente en el que lo estén.
2. Escribir la ecuación matricial $AX = B$ que representa el sistema.
   (a) A es la matriz de los coeficientes de las variables, en orden.
   (b) X es la matriz de una columna que contiene las variables, en orden.
   (c) B es la matriz de una columna que contiene las constantes de las ecuaciones, en orden.
3. Se encuentra la inversa (A^{-1}) de la matriz A.
4. Se multiplican ambos miembros de la ecuación matricial por A^{-1} como primer factor.
5. Cada variable corresponde a un elemento del producto de matrices $A^{-1}B$.

Ejemplo 4

Resolver el sistema siguiente utilizando ecuaciones matriciales:

$$4x + 7y = 1$$
$$3x + 5y = 1.$$

Solución

Se tiene $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Se encuentra la inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Fase 1: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & -3/4 & 1 \end{array}\right]$

Fase 2: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right]$

Por tanto, la inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

Se multiplican ambos miembros de la ecuación matricial por esta inversa:

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se tiene $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

La solución del sistema es $(2, -1)$, lo cual se verifica fácilmente:

$$4(2) + 7(-1) = 1 \text{ o } 8 - 7 = 1$$
$$3(2) + 5(-1) = 1 \text{ o } 6 - 5 = 1.$$

Ejercicios

Encontrar la inversa de las matrices siguientes. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 6 & -10 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 11 & 5 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Usar ecuaciones matriciales para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Ver el ejemplo 4.

16. $2x + 3y = 1$
$3x - 2y = -5$

17. $6x + 6y = 7$
$6x - 6y = 1$

18. $2x - 3y = 1$
$5x - 7y = 3$

19. $x - 5y = 6$
$2x - 9y = 11$

20. $x + y = 1$
$2x - y = 1$

21. $2x + 3y = 2$
$2x - 3y = 0$

22. $2x + 2y = 1$
$4x + y = 1$

23. $x + 3y + 3z = 2$
$2x + 4y + 3z = 5$
$x + 2y + 3z = 1$

24. $3x + 3y + 3z = 6$
$4x + 3y + 3z = 7$
$3x + 3y + 2z = 7$

25. $x + 2y + z = 3$
$3x + 4y + 2z = 8$
$x + y + z = 2$

*26. La inversa de una matriz 2×2 con elementos enteros con frecuencia contiene fracciones. El denominador de éstas puede concebirse como el determinante formado por los elementos de la matriz original. Encontrar una manera rápida para invertir matrices 2×2 utilizando este hecho.

*27. Considérese la matriz cuadrada mágica $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Su inversa es una matriz cuadrada "mágica"?

*28. ¿Es la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ una matriz cuadrada "mágica"?

*29. Para determinar si una matriz tiene una inversa puede usarse la regla siguiente: si el determinante de una matriz cuadrada es diferente de cero, entonces la matriz tiene inversa; si el determinante es cero, entonces la matriz no tiene inversa. Determinar si existe la inversa de las matrices siguientes.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1/4 & 2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Revisión de capítulo

Al conjunto de dos o más ecuaciones lineales se le llama _____ _____ de ecuaciones lineales simultáneas.

Se dice que un sistema de ecuaciones es _____ si existe un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema de ecuaciones es _____ si no tiene solución.

El método de eliminación de _____ con _____ _____ se usa con frecuencia para encontrar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales en una computadora.

Una _____ $n \times n$ es un número real representado por un arreglo cuadrado de n^2 números.

La regla de _____ establece que el valor de cada variable de un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse como un cociente de determinantes.

Una _____ $m \times n$ es un arreglo rectangular de números con m renglones y n columnas.

Cuando el producto de dos matrices cuadradas es la matriz identidad, a las dos matrices se les llama _____ entre sí.

Prueba de capítulo

Graficar cada par de ecuaciones y determinar la solución del sistema a partir de la gráfica.

1. $x - 2y = 0$
   $2x + y = 10$

2. $3x - 2y = 1$
   $2x - 3y = 9$

Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes por el método de eliminación.

3. $3x - 2y = 1$
   $2x - 3y = 9$

4. $y = x + 1$
   $x = y + 1$

5. $y = 4$
   $x + y = 6$

Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes por el método de eliminación.

6. $x - 2y - 3z = 2$
   $2x + 3y - z = 6$
   $3x - y - 2z = 4$

7. $x - y - z = 4$
   $-x + y - z = 4$
   $-x - y + z = 0$

8. $x + y = 3$
   $y + z = 5$
   $x + z = 4$

9. $x = y + 5$
   $y = z - 1$
   $x = z + 4$

10. $2x + y - 2z = 9$
    $x + 2y + 2z = 0$
    $2x - y + 2z = -1$

Resolver los sistemas siguientes por el método de eliminación de Gauss con sustitución hacia atrás.

11. $x - 2y - 3z = 2$
    $2x + 3y - z = 6$
    $3x - y - 2z = 4$

12. $x - y - z = 4$
    $-x + y - z = 4$
    $-x - y + z = 0$

13. $x + y = 3$
    $y + z = 5$
    $x + z = 4$

14. $x = y + 5$
    $y = z - 1$
    $x = z + 4$

15. $2x + y - 2z = 9$
    $x + 2y + 2z = 0$
    $2x - y + 2z = -1$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con aproximación de centésimas aplicando, cuando sea posible, el método Gauss-Seidel.

16. $\begin{aligned} 3x + y &= 17 \\ x - 3y &= 2 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 7x - 3y &= 11 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 3y &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 2x + 2y &= 7 \\ x + 3y &= 8 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - 3y &= 14 \end{aligned}$

Evaluar los siguientes determinantes.

21. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

Usar la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

24. $\begin{aligned} 2x + 2y &= 7 \\ x + 3y &= 8 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ y + z &= 5 \\ x + z &= 4 \end{aligned}$

Efectuar, cuando sea posible, la suma y resta de matrices.

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Efectuar, si es posible, la multiplicación de matrices.

29. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Encontrar la inversa de las matrices siguientes.

31. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

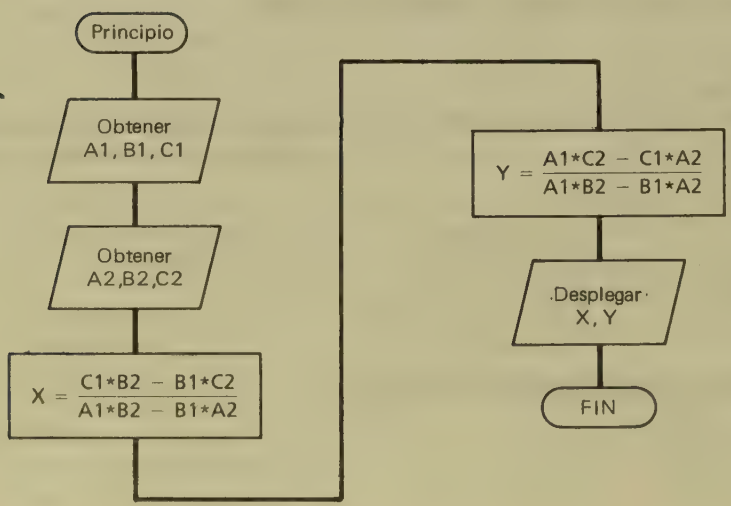
Usar ecuaciones matriciales para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

33. $x + 2y = 3$
$2x + 3y = 4$

34. $x + y = 2$
$2x + 3y = 4$

35. $x + y + z = 2$
$x + 3y + 3z = 4$
$2x + 4y + 3z = 4$

⇒36. En el siguiente diagrama de flujo se muestra un algoritmo para resolver un sistema de ecuaciones $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ utilizando la regla de Cramer cuando la solución es única. Modificarlo para que puedan identificarse los sistemas inconsistentes o dependientes.



BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

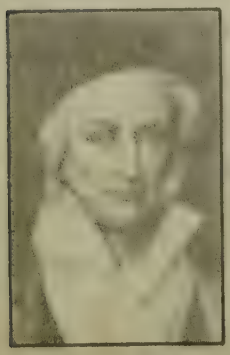
Conklin, Kenneth R. "Using Determinants and Computers to Recognize Dependent and Inconsistent Linear Systems," *The Mathematics Teacher*, Vol. 74 No. 8 (Noviembre 1981), 641-646.

Hanson, Robert. "Integer Matrices Whose Inverses Contain Only Integers," *The Towo-Year College Mathematics Journal*, Vol. 13 No. 1 (Enero 1982), 18-21. (Se proporciona el método para construir tales matrices.)

Lancaster. Ronald J. "Magic Square Matrices," *The Mathematics Teacher*, Vol. 72 No. 1 (Enero 1979), 30-32.

Rogues, Alban J. "Determinants: A Short Program," *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 10 No. 5 (Noviembre 1979), 340-342. (Programa en FORTRAN para evaluar determinantes mediante la regla de Chio.)

Biografía **Carl Friedrich Gauss**



Nació en Alemania el 30 de abril de 1777. Su padre fue maestro de obras. Se asombró cuando a los tres años Carl, al verlo trabajar con la nómina, observó un error y le dio la suma correcta. Cuando Gauss tenía 10 años, el profesor puso a los alumnos el problema de sumar todos los números naturales del uno al 100. El objetivo del ejercicio era mantener ocupado al grupo, pero Gauss rápidamente observó que $1 + 100 = 2 + 99 \ldots = 101$, y que hay 50 pares de una suma de $50(101) = 5\,050$. El profesor apenas había acabado de explicar la tarea cuando Gauss se levantó de su pupitre con la respuesta correcta.

Cuando en 1796 demostró que era posible construir un polígono de 17 lados de igual longitud utilizando únicamente compás y regla, decidió estudiar matemáticas en lugar de idiomas. Fernando, duque de Braunschweig, financió la educación de Gauss. Cuando obtuvo su doctorado en 1801, el duque le concedió un estipendio para que pudiera continuar sus investigaciones matemáticas sin tener que dedicarse a la docencia.

Su reputación creció por sus trabajos en astronomía. Sólo eran posibles unas cuantas observaciones de la posición de Ceres, el primer asteroide descubierto. Sin embargo, Gauss pudo calcular su órbita. Además, problemas que antes tomaban varios días podían resolverse en pocas horas con su método.

En 1805 Gauss contrajo matrimonio con Johanna Osthoff. Tuvieron tres hijos. Ella murió en 1809 y por el bien de sus pequeños hijos, se casó con Minna Waldek, una amiga de su primera esposa. También tuvieron tres hijos.

Murió el 23 de febrero de 1855. Pidió que su lápida llevara un polígono de 17 lados. Se usó una estrella de 17 puntas para que no se confundiera con un círculo.

9

Programación lineal

En ocasiones, el algoritmo símplex para resolver problemas de programación lineal se describe como un método para buscar la solución óptima de un problema moviéndose de un vértice a otro de un poliedro, justo como un insecto podría deslizarse por su superficie.

9.1. PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es una rama de las matemáticas que se ha desarrollado a partir de los años cuarenta. La palabra programación no se refiere en este caso a la computación, a pesar de que es común usar computadoras para resolver problemas que manualmente requerirían gran cantidad de trabajo. En síntesis, un problema de programación lineal consiste, en encontrar el valor máximo o mínimo de una función lineal (por ejemplo, aquella en la que ninguna de las variables tenga un exponente diferente de uno). Existen restricciones sobre los valores que pueden asumir las variables, las cuales se expresan como ecuaciones o desigualdades lineales.

Los problemas que se consideran en este capítulo son más sencillos que los que se presentan en la práctica, pero ilustran el enfoque general. Con frecuencia, la programación lineal se aplica en problemas de producción en los que el objetivo es lograr la producción máxima con el mínimo de recursos. Debe partirse de la *propiedad de proporcionalidad*. Esto significa que si los recursos se incrementan en cierto factor, la producción aumenta en el mismo. Pero en las compras al mayoreo suelen concederse descuentos, por lo que si se duplica el gasto en insumos, el incremento de la producción podría ser de más del doble. Por consiguiente, en la práctica puede no cumplirse la propiedad de proporcionalidad.

El propósito de esta sección es el estudio de problemas de programación lineal y su formulación matemática. Considérese el problema siguiente.

"En una panadería se venden pasteles de chocolate y de zanahoria. La ganancia en un pastel de chocolate es de \$3, mientras que en uno de zanahoria es de \$2. Un pastel de chocolate requiere 10 minutos en la mezcladora y 40 minutos en el horno, y uno de zanahoria, 5 minutos en la primera y 36 minutos en el segundo. La mezcladora puede funcionar a lo sumo 240 minutos diarios sin sobrecalentarse, y el horno, no más de 1 280 minutos diarios.

El dueño piensa vender por lo menos igual número de pasteles de chocolate que de zanahoria. ¿Cuántos pasteles de cada tipo debe hacer el panadero diariamente a fin de conseguir la utilidad máxima, suponiendo que se venderán todos los pasteles?"

El objetivo o meta en este problema es maximizar la utilidad. Hay tres variables.

Sea x = número de pasteles de chocolate
Sea y = número de pasteles de zanahoria
Sea P = monto de la utilidad.

Puesto que la ganancia en cada pastel de chocolate es de \$3 y el panadero venderá x de ellos, la utilidad será de $3x$. Puesto que la ganancia en cada pastel de zanahoria es de \$2 y el panadero venderá y de ellos, la utilidad será de $P = 3x + 2y$. A está ecuación se le llama *función objetivo*.

La utilidad deberá maximizarse sujeta a ciertas restricciones, las cuales consisten en el tiempo limitado de operación del equipo. La mezcladora requiere 10 minutos para cada uno de los x pasteles de chocolate o $10x$ minutos, mientras que requiere 5 minutos para cada uno de los y pasteles de zanahoria o $5y$ minutos. Puesto que la mezcladora puede funcionar "a lo sumo" 240 minutos, puede decirse que $10x + 5y \leqslant 240$. Para el horno se tiene $40x + 36y \leqslant 1280$. Obsérvese que la frase "no más de" se representa como $\leqslant$. Por último, el enunciado de que debe haber "por lo menos igual número de pasteles de chocolate que de zanahoria" puede escribirse $y \geqslant x$. Se sabe también que en este problema $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$, dado que no es posible producir un número negativo de pasteles.

Frases como "por lo menos", "a lo sumo" y "no más de" son comunes en los problemas de programación lineal. A es *por lo menos* B significa $A \geqslant B$. A es *a lo sumo* B significa $A \leqslant B$. A no es más que B significa $A \leqslant B$.

Los problemas de programación lineal dan la impresión de ser muy largos. Es necesario establecer cierto número de condiciones. Para expresar estos problemas en lenguaje matemático es conveniente consi-

derarlos en cuatro pasos. Primero, preguntarse cuál es el objetivo o meta. Con frecuencia será maximizar la utilidad o minimizar los costos. Segundo, identificar las variables. Se vuelve a la pregunta y al objetivo del paso 1 para ver qué elementos del problema se desconocen. El tercer paso es escribir la función objetivo. Ésta es un fórmula para la cantidad que va a maximizarse o minimizarse. Por último, en el cuarto paso se escriben las restricciones. Éstas son desigualdades que limitan los valores que pueden asumir las variables. Los pasos anteriores se resumen en la tabla siguiente.

Para escribir la formulación matemática de un problema de programación lineal:

1. Se establece el objetivo o meta.
2. Se identifican las variables.
3. Se escribe la función objetivo.
4. Se escriben las restricciones.

Ejemplo 1

Hacer la formulación matemática del problema siguiente:

"Un dietista desea recetar por lo menos 20 mg de grasas y, por lo menos, 17 mg de carbohidratos combinando jaiba y pescado. Una cucharada de jaiba contiene 2 mg de grasas y 1 mg de carbohidratos, en tanto que una de pescado, 5 mg de grasa y 6 mg de carbohidratos. La cucharada de jaiba cuesta \$0.70 y la de pescado \$0.30. ¿Cuántas cucharadas de jaiba y cuántas de pescado deberán usarse para obtener la comida más barata que cumpla los requisitos del dietista?"

Solución

1. El objetivo o meta es minimizar el costo.
2. Se necesitará una variable para el costo. Y como se pregunta cuántas cucharadas de jaiba y de pescado deben usarse, se necesitan variables para dichas cantidades.

   Sea C = costo de la mezcla.
   Sea x = número de cucharadas de jaiba.
   Sea y = número de cucharadas de pescado.

3. La función objetivo será una fórmula para el costo. Puesto que cada cucharada de jaiba cuesta \$0.70, x cucharadas costarán $.70x$. Asimismo, y cucharadas de pescado costarán $.30y$. Por lo tanto, $C = .70x + .30y$.

4. Las restricciones son limitaciones sobre las cantidades de grasa y carbohidratos que deben incluirse.

Tanto la jaiba como el pescado contienen grasa. Hay 2 mg de grasa en cada una de las x cucharadas de jaiba y 5 mg en cada una de las y cucharadas de pescado. También debe haber por lo menos 20 mg de grasa. Se tiene $2x + 5y \geqslant 20$.

La jaiba y el pescado contienen carbohidratos. Hay 1 mg de carbohidratos en cada una de las x cucharadas de jaiba y 6 mg de carbohidratos en cada una de las y cucharadas de pescado. Por lo menos, debe haber 17 mg de carbohidratos, por lo que se tiene $x + 6y \geqslant 17$.

Además, en este problema $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$, dado que no es posible mezclar cantidades negativas ni de jaiba ni de pescado.

La formulación del problema está completa ahora. Se resolverá en la sección 9.4.

Ejercicios

Hacer la formulación matemática de los problemas siguientes. Ver el ejemplo 1.

1. La dueña de una dulcería tiene 110 cerezas cubiertas de chocolate y 104 cremas de naranja. Puede vender una caja con 10 cerezas y 24 cremas y una caja con 20 cerezas y 8 cremas. Si la ganancia en la caja del primer tamaño es de \$3 y de \$2 en la del segundo, encontrar el número de cajas de cada tipo que debe vender a fin de maximizar la utilidad.
2. La dueña de una dulcería tiene 90 cerezas cubiertas de chocolate y 176 cremas de naranja. Puede vender una caja grande con 10 cerezas y 24 cremas y una caja chica con 20 cerezas y 8 cremas. La ganancia en una caja grande es de \$2.50 y en una caja chica de \$2. Encontrar el número de cajas de cada tipo que debe vender a fin de maximizar la utilidad.
3. Una compañía elabora granola mezclando cereal y fruta. Tiene en existencia 6 000 kg de cereal y 4 000 kg de fruta. Una caja normal de granola contiene 3/4 kg de cereal y 1/2 kg de fruta, mientras que la caja especial contiene 1/2 kg de cereal y 1 kg de fruta. La ganancia en la caja regular es de \$0.20 y en la especial de \$0.50. Encontrar el número de cajas de cada tipo que deberán producirse para maximinar la utilidad.
4. Una compañía elabora granola mezclando cereal y fruta. Tiene en existencia 6 000 kg de cereal y 4 000 kg de fruta. Una caja normal de granola contiene 3/4 kg de cereal y 1/2 kg de fruta, mientras que la caja especial contiene 1/2 kg de cereal y 1 kg de fruta. La ganancia en la caja regular es de \$0.50 y en la especial de \$0.30. Si sólo pueden empacarse 4 000 kg de granola, encontrar el número de cajas de cada tipo que deberán producirse para maximizar la utilidad.
5. Una compañía fabrica marcos metálicos para fotografías. Un marco de 5" por 7" requiere 1/2 minuto de formación y 1/3 de minuto de cromado. Un marco de 8" por 10" requiere 3/4 de minuto de formación y

1 minuto de cromado. Las máquinas para formar y cromar pueden usarse hasta 8 horas (480 minutos) diarias. Si la ganancia en cada marco de 5" por 7" es de \$1 y de \$2 en los de 8" por 10", encontrar el número de marcos de cada tamaño que deben fabricarse para maximizar la utilidad.

6. Una compañía fabrica marcos metálicos para fotografías. Un marco de 5" por 7" requiere 1/2 minuto de formación y 1/3 de minuto de cromado. Un marco de 8" por 10" requiere 3/4 de minuto de formación y 1 minuto de cromado. Las máquinas para formar y cromar pueden usarse hasta 8 horas (480 minutos) diarias. El número total de marcos fabricados no puede exceder 720. Si la ganancia en cada marco de 5" por 7" es de \$1 y de \$2 en los de 8" por 10", encontrar el número de marcos de cada tamaño que deben fabricarse para maximizar la utilidad.
7. Un dietista desea usar una combinación de quesos procesados manchego y suizo. Una onza de queso manchego contiene 210 mg de calcio y 330 mg de vitamina A, en tanto que una onza de queso suizo, 270 mg de calcio y 33 mg de vitamina A. El dietista quiere que la combinación incluya por lo menos 1 170 mg de calcio y por lo menos 1 560 mg de vitamina A. El costo del queso manchego es de \$0.25 la onza y el costo del queso suizo de \$0.20 la onza. ¿Cuántas onzas de queso deberá usar para minimizar el costo?
8. Un dietista desea usar una combinación de quesos procesados manchego y suizo. Una onza de queso manchego contiene 210 mg de calcio y 330 mg de vitamina A, en tanto que una onza de queso suizo, 270 mg de calcio y 33 mg de vitamina A. Además, cada onza de queso manchego contiene 105 calorías y cada onza del suizo contiene 105 calorías. El dietista quiere que la combinación incluya por lo menos 1 170 mg de calcio y, por lo menos, 1 560 mg de vitamina A. El costo del queso manchego es de \$0.25 la onza y el costo del queso suizo de \$0.20 la onza. ¿Cuántas onzas de cada queso deberá usar para minimizar las calorías?
9. Un excursionista desea hacer una mezcla de chocolates y cacahuates. Una ración de chocolates proporciona 104 mg de calcio y 1 mg de hierro, mientras que una de cacahuates, 26 mg de calcio y 2 mg de hierro. El excursionista quiere que la mezcla contenga por lo menos 234 mg de calcio y por lo menos 4 mg de hierro. La ración de chocolates cuesta \$0.30 y la de cacahuates \$0.20. Encontrar cuántas raciones de cada ingrediente debe contener la mezcla a fin de minimizar el costo.
10. Un excursionista desea hacer una mezcla de chocolates y cacahuates. Una ración de chocolates proporciona 104 mg de calcio y 1 mg de hierro, mientras que una de cacahuates, 26 mg de calcio y 2 mg de hierro. El excursionista quiere que la mezcla contenga por lo menos 234 mg de calcio y por lo menos 4 mg de hierro. Además, debe haber al menos cuatro raciones de la mezcla. La ración de chocolates cuesta \$0.30 y la de cacahuates \$0.20. Encontrar cuántas raciones de cada ingrediente debe contener la mezcla a fin de minimizar el costo.
11. Un panadero desea aumentar el valor nutritivo de sus productos agregando germen de trigo y leche en polvo descremada a la harina. Una taza de germen de trigo contiene 1 1/2 mg de vitamina B_1 y 1/2 mg de vitamina B_2. Una taza de leche en polvo descremada contiene 1/2 mg de vitami-

na B_1 y 1 1/2 mg de vitamina B_2. El panadero quiere que su producto se enriquezca con, por lo menos, 1 mg de cada vitamina. La taza de germen de trigo cuesta \$0.41 y la de leche en polvo descremada, \$0.34. ¿Cuántas tazas de germen de trigo y cuántas de leche en polvo descremada debe agregar a fin de minimizar el costo?

12. Un panadero desea aumentar el valor nutritivo de sus productos agregando germen de trigo y leche en polvo descremada a la harina. Una taza de germen de trigo contiene 1 1/2 mg de vitamina B_1 y 1/2 mg de vitamina B_2. Una taza de leche en polvo descremada contiene 1/2 mg de vitamina B_1 y 1 1/2 mg de vitamina B_2. El panadero quiere que su producto se enriquezca con, por lo menos, 1 mg de cada vitamina. Además, debe agregar, por lo menos, 1 1/2 tazas de la mezcla a la receta. La taza de germen de trigo cuesta \$0.41 y la de leche en polvo descremada, \$0.34. ¿Cuántas tazas de germen de trigo y cuántas de leche en polvo descremada debe agregar a fin de minimizar el costo?

9.2. DESIGUALDADES LINEALES

En la sección 9.4 se resolverán por graficación los problemas de la sección 9.1. En esta sección y la siguiente se examinan algunas técnicas de graficación que ayudarán a resolver estos problemas.

Puesto que una recta representa una ecuación de la forma $y = mx + b$, puede decirse que la recta representa los pares ordenados (x, y) tales que y y $mx + b$ son iguales. Para cualquier valor dado de x, los puntos que están arriba de la recta tienen valores de y mayores que el valor de y del punto que está sobre la recta (por ejemplo, $y > mx + b$). Los puntos que están abajo de la recta tienen valores de y menores que el valor de y del punto que está sobre la recta ($y < mx + b$). Esta observación facilita la graficación de desigualdades lineales.

Por ejemplo, para graficar $y \geq 2x - 3$, primero se traza la ecuación $y = 2x - 3$. La solución de $y \geq 2x - 3$ incluye los puntos que están arriba de la recta, así como los que están sobre ella, por lo que se sombrea el área del plano para representar la solución. Ver la figurà 9.1.

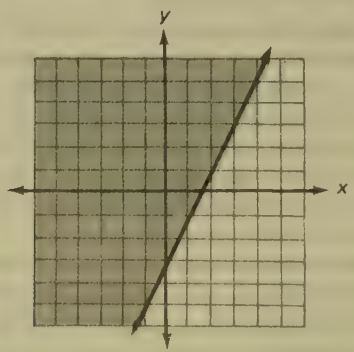


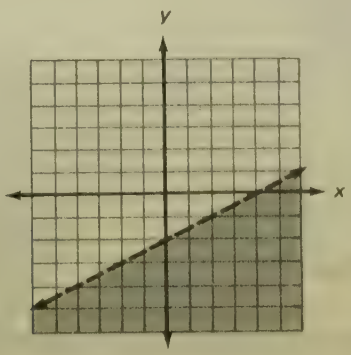
Figura 9.1

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de $y < 1/2x - 2$.

Solución

Se traza la gráfica de $y = 1/2x - 2$ usando una línea punteada, ya que los valores que están sobre la recta no están incluidos en la solución. Después se sombrea el área que está abajo de la recta para obtener los valores de y tales que para cada valor de x, los valores de y sean menores que el valor de y que está sobre la recta. Ver la figura siguiente.



Las desigualdades lineales no siempre se expresan con y en uno de los miembros y $mx + b$ en el otro. Considérese $2y - 3x \geqslant 6$. Las restricciones de un problema de programación lineal con frecuencia se escriben en esta forma, con ambas variables en el mismo miembro de la desigualdad. En lugar de escribir otra vez la desigualdad como $y \geqslant 3/2x + 3$ para usar la pendiente y la ordenada al origen, podría conservarse la forma $2y - 3x \geqslant 6$ y usar las intersecciones con ambos ejes de coordenadas. Dos puntos determinan una recta y, en particular, las dos intersecciones facilitan el trabajo. Cuando $x = 0$, la recta corta el eje y; cuando $y = 0$, la recta corta el eje x.

Para encontrar la intersección con el eje y de la recta

$2y - 3x = 6$, se hace $x = 0$
$2y \quad\quad = 6$, de donde $y = 3$.

Para encontrar la intersección con el eje x de la recta

$2y - 3x = 6$, se hace $y = 0$
$\quad -3x = 6$, de donde $x = -2$.

Por tanto, $(0, 3)$ y $(-2, 0)$ son dos de los puntos de la gráfica.

Puesto que el coeficiente de y es positivo, se sabe que si la ecuación se escribiera de tal manera que el coeficiente de y fuera 1, se seguiría teniendo una desigualdad $\geqslant$. Es decir, para cualquier valor de x, los valores de las y arriba de la recta seguirían siendo mayores que el valor de y sobre la recta. Ver la figura 9.2.

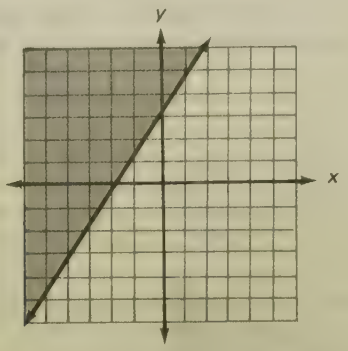


Figura 9.2

Los pasos para la graficación de una desigualdad se resumen de la manera siguiente:

Para graficar una desigualdad lineal:

1. Si es necesario, se escribe una desigualdad equivalente que tenga a y en el primer miembro con coeficiente positivo.
2. Se sustituye el símbolo de desigualdad por el de igual y se encuentran las intersecciones con los dos ejes, o se encuentra la pendiente y la ordenada al origen.
3. Se grafca la ecuación. Ésta será la recta limítrofe.

   a. Se usa una línea continua para una desigualdad $\geqslant$ o $\leqslant$.
   b. Se usa una línea punteada para una desigualdad $>$ o $<$.

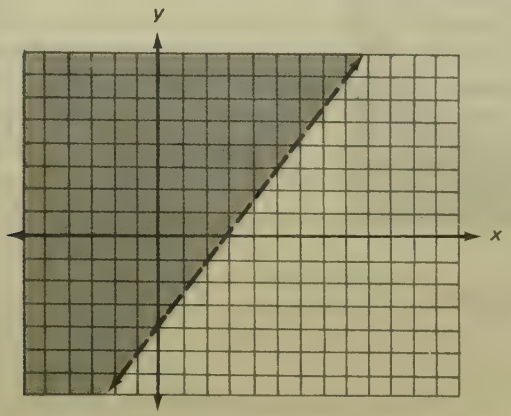
4. Se sombrea el área que está arriba de la recta limítrofe para una desigualdad $\geqslant$ o $>$.
   Se sombrea el área que está abajo de la recta limítrofe para una desigualdad $\leqslant$ o $<$.

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de $4x - 3y < 12$.

Solución

Se multiplican ambos miembros de la desigualdad por -1 para que el coeficiente de y sea positivo. Se tiene $-4x + 3y > -12$. (Recuérdese que al multiplicar por un número negativo se invierte el sentido del símbolo de desigualdad.) Considérese $-4x + 3y = -12$. Cuando $x = 0$, $y = -4$. Cuando $y = 0$, $x = 3$. Por tanto, $(0, -4)$ y $(3, 0)$ son dos puntos de la recta limítrofe. Se usa una línea punteada y se sombrea el área que está sobre ella. Ver la figura siguiente.

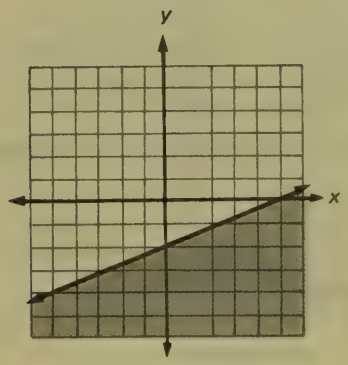


Ejemplo 3

Trazar la gráfica de $2x - 5y \geqslant 10$.

Solución

La desigualdad es equivalente a $-2x + 5y \leqslant -10$. Considérese $-2x + 5y = -10$. Cuando $x = 0$, $y = -2$. Cuando $y = 0$, $x = 5$. Las intersecciones son $(0, -2)$ y $(5, 0)$. Se usa una recta continua para la recta limítrofe y se sombrea el área que está abajo de ella. Ver la figura siguiente.



Es posible graficar dos o más desigualdades en el mismo plano. La solución del sistema de desigualdades se representa por la región del plano en la que se traslapan los sombreados de las soluciones individuales. Por ejemplo si $4x - 3y > 12$ y $2x - 5y \geqslant 10$ se trazan en el mismo plano, se obtiene la gráfica de la figura 9.3. La región más oscura indica los valores que satisfacen ambas desigualdades.

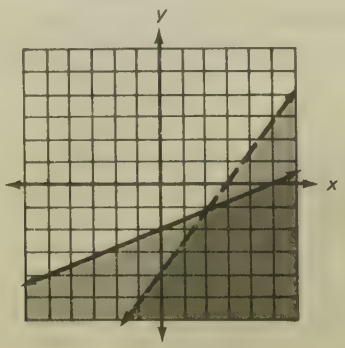


Figura 9.3

Ejercicios

Trazar la gráfica de las siguientes desigualdades. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. $y \geqslant 2x + 1$	**2.** $y < 3x - 2$	**3.** $y > \frac{1}{2}x - 1$
4. $y \leqslant \frac{2}{3}x + 3$	**5.** $y < x + 2$	**6.** $y \leqslant -x + 4$
7. $y \geqslant -2x - 3$	**8.** $x + y \geqslant 4$	**9.** $2x + 3y \leqslant 6$
10. $3x - 5y > 10$	**11.** $x - 2y < 12$	**12.** $2x + y \leqslant 4$
13. $x - y > 7$	**14.** $y \geqslant x$	**15.** $x \leqslant y$
16. $x > -3$	**17.** $y \leqslant 1$	**18.** $x < 2$
19. $y + 1 > x$	**20.** $x + 1 \leqslant y$	**21.** $3x - y \geqslant 2$
22. $3y - x < 2$	**23.** $y - 3 \leqslant x$	**24.** $x - 2 > y$

Trazar los siguientes pares de desigualdades en el mismo plano y sombrear la región que satisfaga a ambas desigualdades.

*25. $2x - y \leqslant 5$
$x + 2y \leqslant 5$

*26. $x - y \leqslant 1$
$x + y \leqslant 5$

*27. $3x - y \geqslant 4$
$x + 3y \geqslant 8$

*28. $2x + 5y \leqslant 9$
$3x - 4y \leqslant 10$

9.3. GRAFICACIÓN

Por lo general, en un problema de programación lineal interviene más de una desigualdad o restricción. Para resolver este tipo de problema se grafican todas las restricciones en el mismo plano. La región del plano en que los puntos satisfacen todas las restricciones se llama *región factible*. No es posible graficar con rapidez si se sombrea el área completa de cada desigualdad. Por lo tanto, sólo se sombreará una franja angosta próxima a la recta limítrofe para cada una de ellas y se indicará cada ecuación. Considérense las desigualdades

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0$$
$$x \leqslant 4, y \leqslant 4$$
$$x + y \leqslant 5.$$

En la figura 9.4. se muestra la gráfica de $x \leqslant 4$:

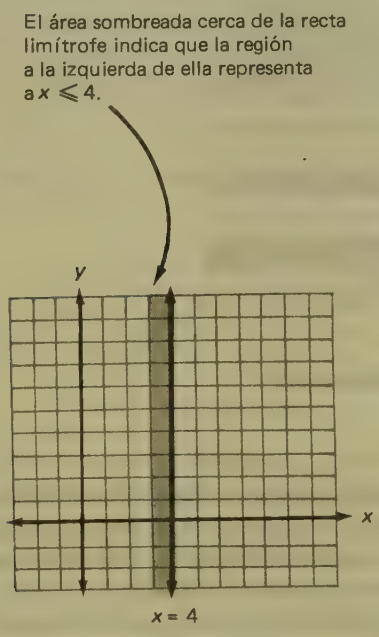


Figura 9.4

Se trazan después las demás desigualdades en la misma gráfica. Ver la figura 9.5.

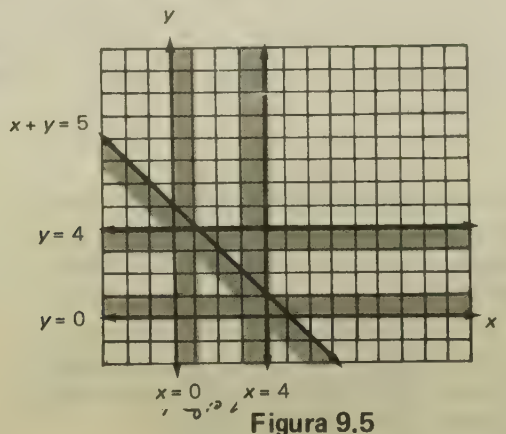


Figura 9.5

Por último, se sombrea el área en la que los puntos satisfacen simultáneamente todas las desigualdades. Es una región limitada por todos lados por el sombreado limítrofe que se ha hecho, y ninguna de las rectas limítrofes está incluida en ella. Ver la figura 9.6.

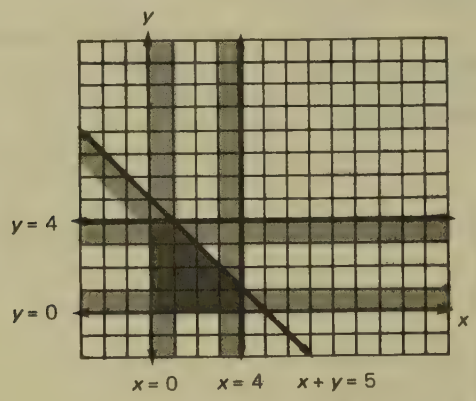


Figura 9.6

La solución de un problema de programación lineal siempre coincide con uno de los vértices de la región factible. Un vértice es un punto en el que cortan dos lados de la región factible (*i.e.*, el punto de una esquina). Para encontrar el valor máximo (o mínimo) de la función objetivo simplemente se examina su valor en cada uno de los vértices para ver cuál de ellos produce el valor máximo (o mínimo).

En la figura 9.6 los vértices se localizan en (0, 0), (4, 0), (4, 1), (1, 4) y (0, 4). Si la función objetivo fuera $P = 3x + 2y$, la información podría presentarse en forma de tabla. Las coordenadas x y y se muestran a la izquierda y el valor de la función objetivo a la derecha.

x	y	$P = 3x + 2y$
0	0	$0 + 0 = 0$
4	0	$12 + 0 = 12$
4	1	$12 + 2 = 14$
1	4	$3 + 8 = 11$
0	4	$0 + 8 = 8$

El valor máximo de P ocurre cuando $x = 4$ y $y = 1$.
Los pasos aplicados en este ejemplo se resumen en la tabla siguiente.

Para encontrar el valor máximo (o mínimo) de la función objetivo:

1. Se trazan todas las restricciones en la misma gráfica.
2. Se sombrea la región factible.
3. Se identifican los vértices.
4. Se calcula el valor de la función objetivo en cada vértice.
5. Se identifica el valor máximo (o mínimo) de la función objetivo.

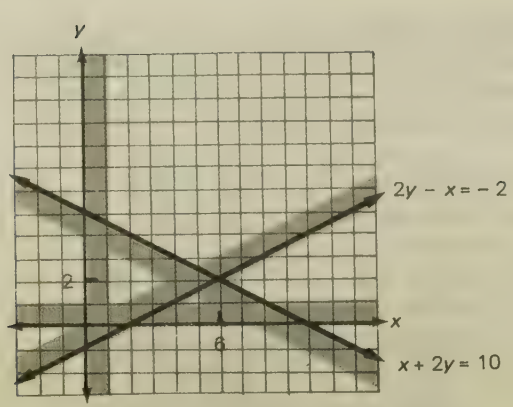
Ejemplo 1

Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 2x + y$ sujeta a las restricciones

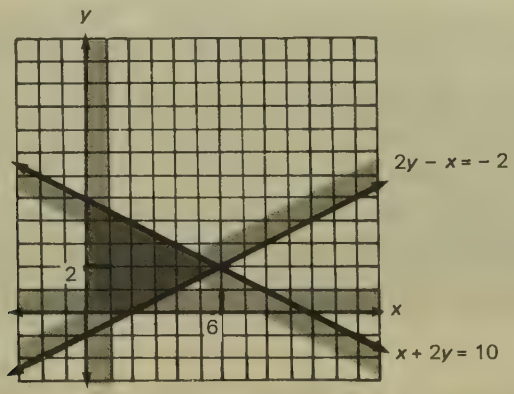
$$x \geqslant 0, y \geqslant 0,$$
$$x + 2y \leqslant 10, \text{ y}$$
$$2y + 2 \geqslant x.$$

Solución

Las restricciones $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$ limitarán la región factible en el primer cuadrante. La desigualdad $x + 2y \leqslant 10$ tiene (0, 5) y (10, 0) como intersecciones con los ejes de la recta limítrofe. La solución es el área que está abajo de la recta. La desigualdad $2y + 2 \geqslant x$ puede escribirse como $2y - x \geqslant -2$, y las intersecciones con los ejes de la recta limítrofe son (0, 1) y (2, 0). La solución es el área que está arriba de la recta. La gráfica se muestra en la figura siguiente.



La región factible es el área en la que los puntos satisfacen todas las desigualdades. Se muestra con el área más oscura en la figura siguiente.



Se conocen las coordenadas de tres de los cuatro vértices por el hecho de haber usado las intersecciones con los ejes para graficar las restricciones. Éstas son (0, 0), (0, 5) y (2, 0). El cuarto vértice se localiza en la intersección de $x + 2y = 10$ y $2y - x = -2$. Se encuentra ese punto por el método de eliminación.

$$\begin{array}{r} x + 2y = 10 \\ -x + 2y = -2 \\ \hline 4y = 8 \end{array}$$

de donde $y = 2$

Si $y = 2$, se tiene $x + 2(2) = 10$, de donde $x = 6$. Por tanto, el vértice es (6, 2). Se enlistan estos vértices y el valor de $P = 2x + y$ en cada uno de ellos.

x	y	$P = 2x + y$
0	0	$0 + 0 = 0$
0	5	$0 + 5 = 5$
2	0	$4 + 0 = 4$
6	2	$12 + 2 = 14$

Por tanto, el valor máximo de $P = 2x + y$ ocurre cuando $x = 6$ y $y = 2$.

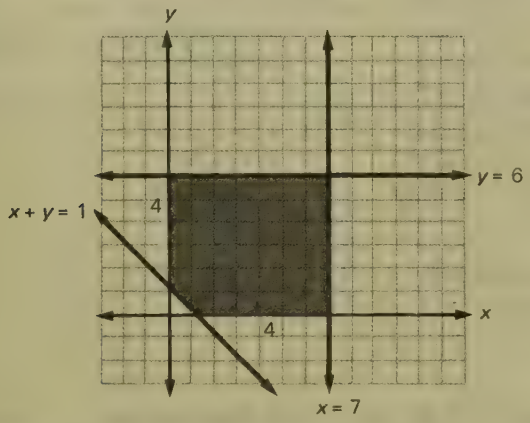
Ejemplo 2

Encontrar los valores de x y y que producen el valor mínimo de $C = 3x + 2y$ sujeta a las restricciones

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0,$$
$$x \leqslant 7, y \leqslant 6, \text{ y}$$
$$x + y \geqslant 1.$$

Solución

Se grafica la región factible.



Los vértices y la función objetivo se muestran en la tabla siguiente.

x	y	$C = 3x + 2y$
0	1	$0 + 2 = 2$
1	0	$3 + 0 = 3$
7	0	$21 + 0 = 21$
7	6	$21 + 12 = 33$
0	6	$0 + 12 = 12$

El valor mínimo de C ocurre cuando $x = 0$ y $y = 1$.

Ejercicios

Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones dadas. Ver el ejemplo 1.

1. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $x + y \leqslant 6$
   $y - x \leqslant 2$

2. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $x + 2y \leqslant 8$
   $2y \leqslant 3x$

3. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $x \leqslant 5, y \leqslant 6$
   $x + y \leqslant 8$

4. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $y - x \leqslant 3$
   $y + x \leqslant 6$
   $y - x \geqslant -2$

5. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $3y - x \leqslant 6$
   $3y + x \leqslant 18$

6. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $x \leqslant 8, y \leqslant 8$
   $2y - x \leqslant 12$

Encontrar los valores de x y y que minimicen $C = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones dadas. Ver el ejemplo 2.

7. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $x + y \geqslant 4$

8. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $3y + x \geqslant 9$
   $y + 2x \geqslant 8$

9. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
   $3y - 2x \geqslant 2$
   $y + 2x \geqslant 6$

10. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
    $x + y \geqslant 5$
    $y + 3x \geqslant 9$
    $y + 3 \geqslant x$

11. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
    $x + y \geqslant 4$
    $y + 3x \geqslant 6$
    $4y + x \geqslant 7$

12. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
    $x + y \geqslant 3$
    $x \leqslant 8, y \leqslant 6$

13. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
    $y + 3x \geqslant 9$
    $y - x \leqslant 4$
    $x + y \leqslant 10$

14. $x \geqslant 3, y \geqslant 0$
    $3y + x \leqslant 27$
    $3y + 7x \leqslant 63$

15. $x \geqslant 1, y \geqslant 3$
    $x + y \geqslant 6$
    $x + y \leqslant 10$

*16. Graficar las desigualdades $x \geqslant 0, y \geqslant 0$,
$x \leqslant 4, y \leqslant 4$, y
$x + y \leqslant 5$.

Graficar después $P = 3x + 2y$ para $P = 2$, 6, 10, 14 y 18. Imaginar que $P = 3x + 2y$ se mueve de una posición a otra conforme P se incrementa de 0 a 18. ¿Cuál es el valor más grande de P para el que x y y satisfacen las restricciones?

*17. Graficar las desigualdades $x \geqslant 0, y \geqslant 0$,
$x + y \leqslant 10$, y
$2y + 2 \geqslant x$.

Graficar después $P = 2x + y$ para $P = 0$, 4, 7, 11 y 14. ¿Cuál es el valor más grande de P para el que x y y satisfacen las restricciones?

*18. Con base en los problemas 16 y 17, explicar cómo se sabe que la utilidad máxima ocurrirá siempre en uno de los vértices de la región factible.

9.4. PROBLEMAS EN LENGUAJE COMÚN

Ahora que se sabe cómo resolver un problema de programación lineal, se vuelve a los dos ejemplos de la sección 9.1. El primer ejemplo se refería a una panadería.

"En una panadería se venden pasteles de chocolate y de zanahoria. La ganancia en un pastel de chocolate es de \$3, mientras que en uno de zanahoria es de \$2. Un pastel de chocolate requiere 10 minutos en la mezcladora y 40 minutos en el horno, y uno de zanahoria, 5 minutos en la primera y 36 minutos en el segundo. La mezcladora puede funcionar a lo sumo 240 minutos diarios sin sobrecalentarse, y el horno, no más de 1 280 minutos diarios.

El dueño piensa vender por lo menos igual número de pasteles de chocolate que de zanahoria. ¿Cuántos pasteles de cada tipo debe hacer el panadero diariamente a fin de conseguir la utilidad máxima, suponiendo que se venderán todos los pasteles?"

El problema conduce a la formulación matemática presentada en el ejemplo 1 siguiente.

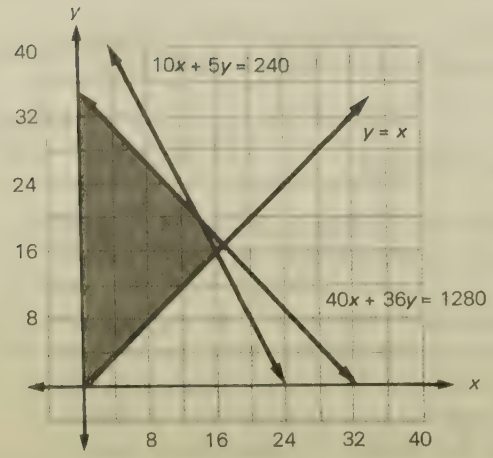
Ejemplo 1

Maximizar $P = 3x + 2y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} x &\geqslant 0, \\ y &\geqslant 0 \\ 10x + 5y &\leqslant 240 \\ 40x + 36y &\leqslant 1280 \\ y &\geqslant x. \end{aligned}$$

Solución

Se trazan las desigualdades en una gráfica. Las condiciones $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ restringen la gráfica al primer cuadrante. La desigualdad $10x + 5y \leqslant 240$ tiene a (0, 48) y (24, 0) como intersecciones con los ejes de la recta limítrofe. La desigualdad $40x + 36y \leqslant 1\,280$ tiene a (0, 35 5/9) y (32, 0) como las intersecciones de la recta limítrofe. La recta limítrofe de $y \geqslant x$ tiene ordenada al origen (0, 0) y pendiente 1. Debido a que los números que tienen que graficarse son bastante grandes, se "escalarán" los ejes. Es decir, en lugar de usar una marca por unidad, sea que una marca represente, en este caso, cuatro unidades. Ver la figura siguiente.



En la gráfica pueden leerse los valores de tres de los cuatro vértices. Éstos son (0, 0), (16, 16) y (0, 35 5/9). El cuarto vértice se localiza en la intersección de las dos rectas $10x + 5y = 240$ y $40x + 36y = 1\,280$. Antes de resolver el problema, se sustituyen ambas ecuaciones por expresiones equivalentes que tengan coeficientes menores. Es decir, los dos miembros de la primera ecuación se dividen entre 5 para obtener $2x + y = 48$, y los dos miembros de la otra ecuación entre 4 para obtener $10x + 9y = 320$. Se elimina ahora x del sistema. Es decir, se tiene

$$\begin{array}{rr} -10x - 5y = & -240 \\ 10x + 9y = & 320 \\ \hline 4y = & 80, \text{ de donde } y = 20. \end{array}$$

Puesto que $2x + y = 48$, se tiene $2x + 20 = 48$, o $2x = 28$, de donde $x = 14$. Ahora que se conocen los valores de los cuatro vértices puede calcularse el valor de la función objetivo.

x	y	$P = 3x + 2y$
0	0	$0 + 0 = 0$
16	16	$48 + 32 = 80$
0	$35\frac{5}{9}$	$0 + 71\frac{1}{9} = 71\frac{1}{9}$
14	20	$42 + 40 = 82$

(Para fines del problema, se conserva la fracción 5/9, aun cuando el panadero no haría 5/9 de pastel)

El valor máximo de la utilidad es 82. Por lo tanto, el panadero deberá hacer 14 pasteles de chocolate y 20 de zanahoria.

El segundo ejemplo de la sección 9.1 se refería a un dietista. "Un dietista desea recetar por lo menos 20 mg de grasas y por lo menos 17 mg de carbohidratos combinando jaiba y pescado. Una cucharada de jaiba contiene 2 mg de grasas y 1 mg de carbohidratos, en tanto que una de pescado contiene 5 mg de grasa y 6 mg de carbohidratos. La cucharada de jaiba cuesta \$0.70 y la de pescado \$0.30. ¿Cuántas cucharadas de jaiba y cuántas de pescado deben usarse para obtener la comida más barata que cumpla los requisitos del dietista?"

El problema conduce a la formulación matemática que se muestra en el ejemplo siguiente.

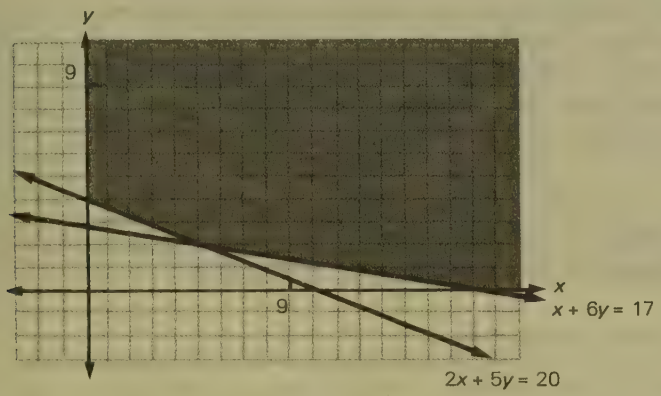
Ejemplo 2

Minimizar $C = 0.70x + 0.30y$ sujeta a las restricciones:

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0$$
$$2x + 5y \geqslant 20$$
$$x + 6y \geqslant 17.$$

Solución

Las restricciones $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$ limitan la región factible al primer cuadrante. La ecuación limítrofe $2x + 5y \geqslant 20$ tiene intersecciones con los ejes en (0, 4) y (10, 0). La ecuación limítrofe $x + 6y \geqslant 17$ tiene intersecciones en (0, 17/6) y (17, 0). Puesto que los números son bastante pequeños, no se necesita cambiar la escala. Ver la figura siguiente.



Obsérvese que la región factible no tiene límites. Se conocen dos de los tres vértices. Éstos son (0, 4) y (17, 0). El tercer vértice se localiza en la intersección de $x + 6y = 17$ y $2x + 5y = 20$. Este sistema de ecuaciones se resuelve eliminando x. Se tiene

$$\begin{array}{r} -2x - 12y = -34 \\ 2x + 5y = 20 \\ \hline -7y = -14, \text{ de donde } y = 2. \end{array}$$

Puesto que $x + 6y = 17$, cuando $y = 2$ se tiene $x + 12 = 17$, de donde $x = 5$. Por tanto, el tercer vértice se localiza en (5, 2). Esta información se muestra en la tabla siguiente.

x	y	$C = .7x + .3y$
0	4	$0 + 1.2 = 1.20$
17	0	$11.90 + 0 = 11.90$
5	2	$3.50 + .60 = 4.10$

El costo mínimo ocurre cuando $x = 0$ y $y = 4$. Es decir, el dietista deberá usar cuatro cucharadas de pescado y ninguna de jaiba.

Ejercicios

Resolver los problemas de los ejercicios de la sección 9.1. Ver los ejemplos 1 y 2.

9.5. EL MÉTODO SÍMPLEX

Resolver por graficación un problema en el que intervienen tres variables sería muy difícil. La región factible sería una figura tridimensional. En un problema con cuatro variables la graficación sería imposible. En 1947 George Dantzig desarrolló un procedimiento para resolver problemas de programación lineal denominado *método símplex*. Este método puede aplicarse si se cumplen las cuatro condiciones siguientes:

1. El problema es maximizar la función objetivo.
2. Todas las restricciones son de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$.
3. Las x_i son variables tales que $x_i \geqslant 0$.
4. $b \geqslant 0$.

La tercera condición requiere que las variables sean positivas o cero. Esta condición se ha cumplido en todos los ejemplos vistos hasta este punto, y se dará por sentada su validez en los demás problemas de este capítulo. Ya no es necesario enunciar que $x \geqslant 0$ y que $y \geqslant 0$ como dos de las restricciones.

Debido a que el método símplex es un procedimiento bastante largo, los pasos se discuten en esta sección y su justificación se introduce en la siguiente.

Para aplicar el método símplex, primero se escriben otra vez las restricciones en forma de ecuaciones sumando una nueva variable ($x_1 \geqslant 0$) en el miembro menor de la desigualdad. Estos nuevos términos se llaman *variables de holgura*. Se construye una tabla con las variables (incluyendo las de holgura) en la parte superior. Abajo de cada una se anota el coeficiente de la misma en las ecuaciones obtenidas a partir de las restricciones. También se enlistan las constantes. Si una de las variables no aparece en una de las ecuaciones, se usa 0 como coeficiente. A continuación se traza un rectángulo alrededor de todos estos coeficientes. Justo abajo del rectángulo se anotan los coeficientes de la función objetivo. Por último, se enlistan las variables de holgura a la izquierda del rectángulo. Cada una de éstas se anota junto al coeficiente de la ecuación en la que se usa. También se enlista al último la variable objetivo (por lo general P o C). Al terminar estos pasos, se tiene la *tabla inicial*. Ésta puede usarse para encontrar la solución del problema de programación lineal. Estos pasos se resumen en la tabla siguiente.

Para construir la tabla inicial del método símplex:

1. Se introducen las variables de holgura a fin de escribir cada restricción como una ecuación.
2. Se inicia la tabla anotando las variables en la parte superior.
3. Se anotan los coeficientes de cada ecuación abajo de la variable correspondiente.
4. Se traza un rectángulo alrededor de los coeficientes.
5. Abajo del rectángulo se anotan los coeficientes de la función objetivo en las columnas correspondientes.
6. Se anotan las variables de holgura seguidas de la variable objetivo a la izquierda de la tabla.

Ejemplo 1

Un fabricante de microcomputadoras produce tres modelos: uno de 16K, uno de 64K y uno de 128K. La ganancia en el primer modelo es de \$50, en el segundo, \$70 y en el tercero, \$90. Las computadoras se hacen en tres departamentos de la fábrica. Debido a la escasez de mano de obra, en el departamento I sólo se cuenta con 200 horas de trabajo a la semana, en el departamento II con 150 horas de trabajo a la semana, y en el departamento III con 300 horas de trabajo a la

semana. El modelo de 16K requiere una hora de producción en cada departamento; el modelo de 64K, una hora en el I, dos hora en el II y una hora en el III; el modelo de 128K, una hora en el I, una hora en el II y tres horas en el III. Encontrar el número de computadoras de cada modelo que deben fabricarse a fin de maximizar la utilidad, suponiendo que todas las computadoras se venderán.

Solución

La formulación matemática de este problema es la siguiente.

La utilidad debe maximizarse.

Sea x = el número de computadoras de 16K.
Sea y = el número de computadoras de 64K.
Sea z = el número de computadoras de 128K.
Sea P = la utilidad.

La función objetivo es $P = 50x + 70y + 90z$.

Las restricciones se refieren al tiempo de fabricación en cada departamento:

Departamento I: $x + y + z \leqslant 200$
Departamento II: $x + 2y + z \leqslant 150$
Departamento III: $z + y + 3z \leqslant 300$

Es posible aplicar el método símplex en este problema porque satisface las cuatro condiciones. Es decir, el objetivo es maximizar la utilidad y todas las variables son del tipo $\leqslant$ con constantes no negativas en el segundo miembro de cada desigualdad.

Se numerarán los pasos del método símplex en este ejemplo para que sea más fácil seguirlos.

1. Las restricciones se vuelven a escribir como ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z + x_1 &= 200 \\ x + 2y + z + x_2 &= 150 \\ x + y + 3z + x_3 &= 300 \end{aligned}$$

donde x_1, x_2 y x_3 son variables residuales mayores o iguales que cero.

2. y 3. Se construye la tabla:

x	y	z	x_1	x_2	x_3	
1	1	1	1	0	0	200
1	2	1	0	1	0	150
1	1	3	0	0	1	300

Variables, incluyendo las de holgura

coeficientes de la primera ecuación
coeficientes de la segunda ecuación
coeficientes de la tercera ecuación

4. Se traza un rectángulo alrededor de los coeficientes

Los pasos 5 y 6 se ilustran en la tabla siguiente.

	x	y	z	x_1	x_2	x_3	
x_1	1	1	1	1	0	0	200
x_2	1	2	1	0	1	0	150
x_3	1	1	3	0	0	1	300
P	**50**	**70**	**90**	**0**	**0**	**0**	**0**

← coeficientes de la función objetivo
variables de holgura y variable objetivo

Se ha terminado la tabla inicial.

Esta tabla se usa para construir la tabla primera. En cada una de las tablas, a las variables de la izquierda se les llama *básicas* o *diferentes de cero*. El valor de cada variable básica está dado por el valor del mismo renglón a la derecha de la tabla. A continuación, se presenta el algoritmo para usar una tabla a fin de obtener la siguiente.

Uso de una tabla símplex para encontrar otra:

1. Se encuentra el valor positivo mayor en el último renglón. Este valor identifica la columna pivote. Los valores positivos de esta columna se dividen entre el valor de la extrema derecha del mismo renglón. El cociente menor identifica el renglón pivote. Se encierra en un círculo el valor del renglón y la columna pivotes. A este valor se le llama *pivote*.
2. Los valores del renglón pivote se dividen entre éste. Con este paso se obtiene un 1 en la posición del pivote para la tabla siguiente.
3. Se cambian los valores restantes de la columna pivote a 0 multiplicando el nuevo renglón pivote por el inverso aditivo del valor que se cambiará y se suma al renglón que se cambiará.
4. Se sustituye la variable a la izquierda del renglón pivote por la variable que encabeza la columna pivote. Las demás variables conservan sus posiciones en la tabla.
5. Se repiten los pasos 1-4 hasta que todos los valores del último renglón sean negativos.

Se vuelve al ejemplo 1 para ilustrar los pasos anteriores. La tabla inicial era:

	x	y	z	x_1	x_2	x_3		
x_1	1	1	1	1	0	0	200	(1)
x_2	1	2	1	0	1	0	150	(2)
x_3	1	1	③	0	0	1	300	(3)
P	50	70	90	0	0	0	0	(4)

Paso 1: 90 es el valor mayor, por lo que z es la columna pivote.

Se comparan

$$200 \div 1 = 200$$
$$150 \div 1 = 150$$
$$300 \div 3 = 100.$$

Puesto que 100 es el cociente menor, el tercer renglón es el renglón pivote, y 3 es el pivote. Ahora se empieza a construir una nueva tabla.

Paso 2: Se divide entre 3 el tercer renglón:

1/3 1/3 1 0 0 1/3 100 (5)

Éste es el tercer renglón de la nueva tabla.

Paso 3: Se sustituye el primer renglón:

1	1	1	1	0	0	200	Renglón (1)
− 1/3	− 1/3	− 1	0	0	− 1/3	− 100	− 1 × Renglón (5)
2/3	2/3	0	1	0	− 1/3	100	(6)

Se sustituye el segundo renglón:

1	2	1	0	1	0	150	Renglón (2)
− 1/3	− 1/3	− 1	0	0	− 1/3	− 100	− 1 × Renglón (5)
2/3	5/3	0	0	1	− 1/3	50	(7)

Se sustituye el cuarto renglón:

50	70	90	0	0	0	0	Renglón (4)
− 30	− 30	− 90	0	0	− 30	− 9000	− 90 × Renglón (5)
20	40	0	0	0	− 30	− 9000	(8)

Paso 4: Se sustituye la variable de la izquierda en el renglón pivote por la variable de la columna pivote. La primera tabla es:

	x	y	z	x_1	x_2	x_3		
x_1	2/3	2/3	0	1	0	− 1/3	100	
x_2	2/3	(5/3)	0	0	1	− 1/3	50	(6) (7)
z	1/3	1/3	1	0	0	1/3	100	(5)
P	20	40	0	0	0	− 30	− 9000	(8)

Paso 5: Es necesario repetir los pasos 4-5, ya que aún existen valores positivos en el último renglón.

La nueva solución se basa en la primera tabla.

Paso 1: La columna y es la columna pivote, pues el valor de esa columna en el último renglón es el mayor. Se comparan

$$100 \div 2/3 = 150$$
$$50 \div 5/3 = 30$$
$$100 \div 1/3 = 300.$$

El segundo renglón es el renglón pivote, y el valor 5/3 es el pivote.

Paso 2: El segundo renglón se divide entre 5/3 (o se multiplica por 3/5). El nuevo segundo renglón es:

2/5 1 0 0 3/5 − 1/5 30. (9)

Paso 3: Se sustituye el primer renglón:

2/3	2/3	0	1	0	−1/3	100	Renglón (6)
− 4/15	− 2/3	0	0	− 2/5	2/15	− 20	(− 2/3) × Renglón (9)
6/15	0	0	1	− 2/5	−3/15	80	(10)

Se sustituye el tercer renglón:

1/3	1/3	1	0	0	1/3	100	Renglón (5)
− 2/15	− 1/3	0	0	− 1/5	1/15	− 10	(− 1/3) × Renglón (9)
3/15	0	1	0	− 1/5	6/15	90	(11)

Se sustituye el cuarto renglón:

20	40	0	0	0	− 30	− 9000	Renglón (8)	
− 16	− 40	0	0	− 24	8	− 1200	− 40 × Renglón	(9)
4	0	0	0	− 24	− 22	− 10200		(12)

Paso 4: Se sustituye la x_2 de la izquierda por y. La segunda tabla es:

	x	y	z	x_1	x_2	x_3		
x_1	2/5	0	0	1	− 2/5	− 1/5	80	(10)
y	2/5	1	0	0	3/5	− 1/5	30	(9)
z	1/5	0	1	0	− 1/5	2/5	90	(11)
P	4	0	0	0	− 24	− 22	− 10200	(12)

Paso 5: Los pasos 1-4 deben repetirse, ya que aún existe un valor positivo en el último renglón. La columna x es la columna pivote. Se comparan $80 \div 2/5 = 200$, $30 \div 2/5 = 75$ y $90 \div 1/5 = 450$. El segundo renglón es el renglón pivote con 2/5 como pivote. El segundo renglón se divide entre 2/5 (o se multiplica por 5/2) para obtener el nuevo segundo renglón:

1	5/2	0	0	3/2	− 1/2	75.	(13)

El nuevo primer renglón es Renglón (10) + (− 2/5) × Renglón (13).
El nuevo tercer renglón es Renglón (11) + (− 1/5) × Renglón (13).
El nuevo cuarto renglón es Renglón (12) + (−4) × Renglón (13).
La variable x sustituye a la y a la izquierda de la tabla.

La tercera tabla es

	x	y	z	x_1	x_2	x_3		
x_1	0	− 1	0	1	− 1	0	50	(14)
x	1	5/2	0	0	3/2	− 1/2	75	(13)
z	0	− 1/2	1	0	− 1/2	1/2	75	(15)
P	0	− 10	0	0	− 30	− 20	− 10500	(16)

Ahora que todos los valores del último renglón son negativos la solución del problema puede leerse en la tabla. Cada variable de la izquierda tiene como valor el último número del mismo renglón. Es decir, $x_1 = 50$, $x = 75$, $z = 75$, y $P = 10\,500$ (nótese el cambio de signo del valor de la variable objetivo). Todas las demás variables son cero. Por lo tanto, $y = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

Ejercicios

Resolver los problemas siguientes con el método símplex. Puede suponerse que $x \geqslant 0$ y que $y \geqslant 0$. Ver el ejemplo 1.

1. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 3x + 4y$ sujeta a

$$x + y \leqslant 6$$
$$y - x \leqslant 2.$$

2. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 4x + 3y$ sujeta a

$$x + y \leqslant 6$$
$$y - x \leqslant 2.$$

3. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 2x + 3y$ sujeta a

$$x + 2y \leqslant 8$$
$$-3x + 2x \leqslant 0.$$

4. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 4x + 5y$ sujeta a

$$x \leqslant 5, y \leqslant 6 \text{ y } x + y \leqslant 8.$$

5. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = x + 2y$ sujeta a

$$x \leqslant 8, y \leqslant 8 \text{ y } 2y - x \leqslant 12.$$

6. Una compañía que fabrica televisiones descubre que al probar la mercancía antes de entregarla puede aumentarse la utilidad. La ganancia aumenta \$1 en el modelo de 13" y \$2 en el de 19". Se requieren 30 segundos para aplicar la prueba A en el modelo de 13" y 40 segundos para el modelo de 19". Se requieren 15 segundos para aplicar la prueba B en el modelo de 13" y 10 segundos para el modelo de 19". Si sólo pueden dedicarse a lo sumo 36 000 segundos diarios a la prueba A y a lo sumo 15 000 segundos diarios a la prueba B, ¿cuántos televisores de cada modelo deberán probarse para maximizar el aumento de la utilidad?
7. Un atleta desea maximizar su consumo de carbohidratos. Una ración de fideos tiene 35 g de carbohidratos y una de pizza 23 g de carbohidratos. Una ración de fideos cuesta \$0.50 y una de pizza \$0.75. Si sólo puede gastar \$5.25 y no puede comer más de ocho raciones, ¿cuántas raciones de cada platillo debe comprar?
8. Una mujer quiere bajar de peso haciendo ejercicio. Jugando golf quema 250 calorías en una hora, mientras que nadando quema 350 calorías en una hora. Si cuenta a lo sumo con seis horas diarias para hacer ejercicio y quiere jugar golf por lo menos el mismo tiempo que dedique a la natación, ¿cuántas horas deberá ocupar en cada deporte para maximizar la reducción de peso?

9. Tres personas fabrican tres modelos de mesas de centro. El trabajador A realiza el corte y el torneado y puede trabajar 40 horas a la semana. El trabajador B arma las mesas y puede trabajar 44 horas a la semana. El trabajador C hace el terminado y puede trabajar 40 horas a la semana.

Para el modelo 1, el corte requiere dos horas
la construcción requiere una hora
el armado requiere dos horas y la ganancia
es de \$20.

Para el modelo 2, el corte requiere una hora
el armado requiere dos horas
el terminado requiere dos horas y la ganancia
es de \$20.

Para el modelo 3, el corte requiere tres horas
el armado requiere cuatro horas
el terminado requiere dos horas y la ganancia
es de \$30.

¿Cuántas mesas de centro de cada modelo deberán hacer para maximizar la utilidad, suponiendo que se venderá toda la producción?

10. Una empresa se anuncia en tres periódicos. Un anuncio cuesta \$5 a la semana en el diario A, \$7 a la semana en el diario B, y \$9 a la semana en el diario C. Se estima que un anuncio en A conseguirá siete nuevos clientes, un anuncio en B conseguirá 10, y uno en C conseguirá 13. En un periodo dado, no pueden colocarse más de 12 anuncios. Se cuenta con un máximo de \$72 para anuncios, y debe haber por lo menos tantos anuncios en A como en B. ¿Cuántos anuncios deben publicarse en cada periódico a fin de conseguir el mayor número de nuevos clientes?

9.6. JUSTIFICACIÓN DEL MÉTODO SÍMPLEX

Considérese el problema: Maximizar $P = 3x + 2y$ sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} 2x + y &\leqslant 7 \\ 3x + y &\leqslant 9. \end{aligned}$$

Para resolverlo aplicando el método símplex se introducen variables residuales y se escribe:

$$\begin{aligned} 2x + y + x_1 &= 7 \\ 3x + y + x_2 &= 9. \end{aligned}$$

La gráfica se muestra en la figura 9.7.

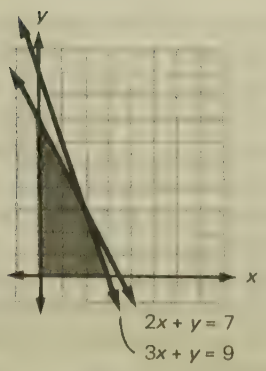


Figura 9.7

Obsérvese que en la recta limítrofe $2x + y = 7$, la variable de holgura $x_1 = 0$ (ya que $2x + y = 7$ y $2x + y + x_1 = 7$, debe tenerse $x_1 = 0$). También, en la recta limítrofe $3x + y = 9$ la variable $x_2 = 0$. En una solución gráfica se considerarían los vértices, y en cada uno de ellos justamente dos de las variables tienen valores cero. En la siguiente tabla se enlistan los vértices y las variables cuyo valor es cero en ellos.

x	y	variables cero
0	0	x, y
3	0	y, x_2
2	3	x_1, x_2
0	7	x, x_1

El método símplex se concibió para considerar las soluciones en las que dos de las variables son cero, por lo que incluye, asimismo, los vértices de la gráfica. En este método se empieza con $x = 0$ y $y = 0$ (la utilidad menos deseable) y se procede a cambiar las variables cuyo valor es cero, buscando una utilidad mejor. Si x y y son cero, entonces las otras variables (x_1 y x_2) deben ser valores diferentes de cero, según se determina por las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y + x_1 &= 7 \quad (1)\\ 3x + y + x_2 &= 9 \quad (2)\\ 3x + 2y &= P. \quad (3) \end{aligned}$$

Ésta es la información que se presenta en la tabla símplex inicial al anotar en la izquierda las variables diferentes de cero x_1 y x_2, de tal forma que correspondan con sus valores $x_1 = 7$ y $x_2 = 9$ de la derecha. Y ya que $P = 0$, se sustituye esa variable por 0.

En la primera tabla se quiere incrementar una de las variables con valor cero. Lo más lógico sería cambiar x, porque un incremento en x se multiplica por 3 en la ecuación de la utilidad, mientras que un incremento en y se multiplica sólo por 2. Por tanto, se elige incrementar la variable con el coeficiente mayor en la ecuación de la utilidad. Por esto se localiza el número mayor en el último renglón de la tabla símplex. Puesto que esta variable no será igual a cero en la siguiente tabla, sustituirá a una de las variables de la izquierda.

Es necesario determinar a cuál de las variables sustituirá y se hará cero el valor de esa variable en la siguiente tabla. Por tanto, la siguiente solución será $y = 0$ y $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$, con las variables restantes diferentes de cero. Se prueban ambas posibilidades.

Se supone que $x_1 = 0$. Entonces a partir de las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$2x + 0 + 0 = 7, \text{ de donde } x = 3.5, \text{ y}$$
$$3(3.5) + 0 + x_2 = 9, \text{ de donde } x_2 = -1.5.$$

Pero x_2 se introdujo como un número positivo sumado a la desigualdad $3x + y \leq 9$ para incrementar el primer miembro. Por tanto, no puede usarse $x_1 = 0$.

La otra posibilidad es probar $x_2 = 0$. Se tiene

$$2x + 0 + x_2 = 7$$
$$3x + 0 + 0 = 9, \text{ de donde } x = 3, \text{ y la otra ecuación da } x_1 = 1.$$

Esta solución es razonable.

Lo que se hizo fue elegir el menor de los valores 7/2 y 9/3 como valor de x, ya que el mayor lleva a una contradicción. En el método símplex este paso corresponde a la elección del cociente menor cuando las constantes se dividen entre los valores de la columna pivote. Una vez que se ha decidido que $x_2 = 0$, se sustituye la x_2 de la izquierda por x.

El cambio del pivote a 1 y la sustitución de los valores que están arriba y abajo de él por ceros corresponde simplemente a la eliminación de una variable, como se hizo en el método de eliminación de Gauss. La tabla está lista ahora para iniciar de nuevo el proceso.

En la tabla final la utilidad aparece en la esquina inferior derecha de la tabla, pero con signo negativo. Este renglón empezó siendo la ecuación $3x + 2y = P$. Si se deja P como variable en la ecuación, cuando se combinan las ecuaciones, en realidad, se obtendría $P - n = 0$, donde n es un número. Pero como las demás variables de la

ecuación de la utilidad son cero, $P - n = 0$, y $P = n$. Puesto que no se anotó la variable P en la tabla, lo único que aparece es $-n$.

En lugar de repetir este razonamiento cada vez que se resuelve un problema de programación lineal, se da por hecho que cualquier problema que satisfaga las condiciones enlistadas al principio de la sección 9.5 sigue el mismo patrón y el trabajo se reduce de manera considerable aplicando mecánicamente los pasos del método símplex.

En 1984 Narendra K. Karmakar de los Laboratorios Bell concibió un nuevo algoritmo para problemas de programación lineal. Señalaba: "El método símplex es adecuado para problemas con varios miles de variables, pero después de 16 mil o 20 mil su capacidad se agota."* El nuevo algoritmo es más complicado, pero necesita menos pasos. Entre mayor es el número de variables del problema, más se amplía la diferencia que existe entre el número de pasos de ambos métodos. La existencia del algoritmo de Karmakar despertó el interés en el mundo de los negocios cuando se dieron a conocer los planes para probarlo con la aplicación de computadoras.

Ejercicios

Aplicar el método símplex para resolver los problemas 1 al 6 de los ejercicios de la sección 9.1.

7. Encontrar los valores de x, y y z que maximicen $P = 3x + 2y + z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y + z &\leqslant 3 \\ x + y + 2z &\leqslant 5 \\ x + 3y + z &\leqslant 7. \end{aligned}$$

8. Encontrar los valores de x, y y z que maximicen $P = x + 2y + 3z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y + z &\leqslant 3 \\ x + y + 2z &\leqslant 5 \\ x + 3y + z &\leqslant 7. \end{aligned}$$

9. Encontrar los valores de x, y y z que maximicen $P = x + 2y + z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x \quad + z &\leqslant 13 \\ x + y \quad &\leqslant 11 \\ y + z &\leqslant 7. \end{aligned}$$

* "New Algorithm Stirs Interest", en *Siam News*, vol. 18, núm. 1 (enero de 1985), 1.

10. Encontrar los valores de x, y y z que maximicen $P = x + y + 2z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + \quad & z \leqslant 13 \\ x + y \quad & \leqslant 11 \\ y + z \leqslant & \ 7. \end{aligned}$$

11. Encontrar los valores de x, y y z que maximicen $P = 2x + y + z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + \ y + z & \leqslant 3 \\ 4x + 2y + z & \leqslant 8 \\ y + z & \leqslant 5. \end{aligned}$$

9.7. PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN

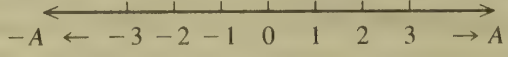
Considérese el problema: Encontrar los valores de x y y que minimicen $C = 7x + 3y$ sujeta a

$$\begin{aligned} 2x + 5y & \geqslant 20 \\ x + 6y & \geqslant 17. \end{aligned}$$

El método símplex se aplica a los problemas que satisfacen cuatro condiciones.

1. Debe tratarse de un problema de maximización.
2. Todas las restricciones son de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$.
3. Todas las x_1 son variables tales que $x_1 \geqslant 0$.
4. $b \geqslant 0$.

El método símplex no funcionará en un problema de minimización sin realizar algunas modificaciones en el mismo. Sin embargo, obsérvese que a medida que una cantidad A se incrementa, su inverso aditivo, $-A$, se hace más pequeño.



Por consiguiente, el problema de minimizar la función $C = 7x + 3y$ se trata como el de maximizar $-C = -7x - 3y$. De este modo se satisface la condición (1).

Después, las restricciones deben transformarse de tal manera que las desigualdades $\geqslant$ sean $\leqslant$. Ambos miembros de las desigualdades se multiplican por -1. Así, $2x + 5y \geqslant 20$ se convierte en $-2x - 5y$

$\leqslant -20$ y $x + 6y \leqslant 17$ en $-x - 6y \leqslant -17$. Ahora, la condición (2) se satisface.

En este texto se ha supuesto que $x_1 \geqslant 0$ y, por tanto, la condición (3) se cumple.

Aun cuando las desigualdades están ahora en la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$, no se tiene $b \geqslant 0$, y es difícil resolver esta dificultad. Será necesario incorporar ciertos refinamientos en el método símplex. Sin embargo, en esta etapa se inicia la construcción de una tabla como si se fuera a maximizar $-C = -7x - 3y$ sujeta a $-2x - 5y \leqslant -20$ y $-x - 6y \leqslant -17$.

	x	y	x_1	x_2	
x_1	-2	-5	1	0	-20
x_2	-1	-6	0	1	-17
$-C$	-7	-3	0	0	0

Antes de iniciar la aplicación del método símplex se necesita eliminar los números negativos de la columna de la derecha. El procedimiento es similar al método símplex original, el cual se resume en la tabla siguiente.

Para eliminar los números negativos de la columna de la derecha de una tabla:

1. Dentro del rectángulo se localiza el primer renglón de arriba a abajo que contenga un valor negativo en la columna de la derecha.
2. Se elige como columna pivote cualquier otra columna con un valor negativo en ese renglón.
   a. Si no hay valores positivos abajo de él en el rectángulo, entonces ese valor deberá usarse como pivote.
   b. Si hay valores positivos abajo de él en el rectángulo entonces el pivote se elige dividiendo cada uno de estos valores positivos entre el valor de la extrema derecha del mismo renglón. El cociente menor determina el pivote.
3. Se dividen los valores del renglón pivote entre el pivote.
4. Se sustituyen por ceros los valores que estén arriba y abajo del pivote como se hizo en el método símplex.
5. Se sustituye la variable de la izquierda del renglón pivote por la variable que encabeza la columna pivote.
6. Se repiten los paso 1-5, de ser necesario, hasta que todos los valores de la columna de la extrema derecha sean positivos.

Después de seguir estos pasos, la tabla satisfará las cuatro condiciones requeridas para aplicar el método símplex.

Se vuelve ahora al ejemplo. La tabla se repite:

	x	y	x_1	x_2		
x_1	-2	-5	1	0	-20	(1)
x_2	-1	-6	0	1	-17	(2)
$-C$	-7	-3	0	0	0	(3)

1. Dentro del rectángulo, el renglón (2) es el primero de arriba a abajo con un valor negativo en la columna de la extrema derecha.
2. Se elige arbitrariamente la primera columna como columna pivote (pudo haberse elegido la segunda, ya que también tiene un valor negativo). Puesto que no hay valores positivos abajo de este renglón, se usará como pivote.

3-5. Estos tres pasos se muestran en la tabla siguiente.

	x	y	x_1	x_2			
x_1	0	7	1	-2	14	Renglón (1) + 2 × renglón pivote	(5)
x	1	6	0	-1	17	Renglón pivote	(4)
$-C$	0	39	0	-7	119	Renglón (3) + 7 × renglón pivote	(6)

Ahora que son positivos todos los valores de la columna de la derecha, todas las condiciones requeridas para aplicar el método símplex se satisfacen. Ésta es, por tanto, la tabla inicial.

La primera tabla sería:

	x	y	x_1	x_2			
y	0	1	1/7	$-2/7$	2	Renglón pivote	(7)
x	1	0	$-6/7$	5/7	5	Renglón (4) + -6 × renglón pivote	(8)
$-C$	0	0	$-39/7$	29/7	41	Renglón (6) + -39 × renglón pivote	(9)

La segunda tabla sería:

	x	y	x_1	x_2		
y	2/5	1	$-1/5$	0	4	Renglón (7) + (2/7) × renglón pivote
x_1	7/5	0	$-6/5$	1	7	Renglón pivote
$-C$	$-29/5$	0	$-3/5$	0	12	Renglón (9) + ($-29/7$) × renglón pivote

Ahora que todos los valores del último renglón son negativos (excepto el último), la solución se lee en la tabla. Se tiene $y = 4$,

$x_1 = 7, x = 0$ y $x_2 = 0$. Puesto que el valor máximo de $-C$ es -12, el valor mínimo de C es 12. A fin de simplificar el proceso, se quita el signo negativo que antecede a la C de la izquierda de la tabla. Así, no es necesario cambiar el signo de la variable objetivo como en el caso de los problemas de maximización.

Para resolver un problema de programación lineal de minimización:

1. Se multiplica la función objetivo por -1 para tener un problema de maximización.
2. Se multiplican los dos miembros de las desigualdades $\geqslant$ por -1.
3. Se eliminan los valores negativos de la columna de la extrema derecha aplicando el procedimiento descrito en esta sección.
4. Se llega a la solución aplicando el método símplex.

Ejemplo 1

Encontrar los valores de x y y que minimicen $C = x + 2y$ sujeta a

$$\begin{aligned} 3x + y &\geqslant 10 \\ x + y &\geqslant 8 \\ 2x + 5y &\geqslant 25. \end{aligned}$$

Solución

El problema es equivalente a encontrar los valores de x y y que maximicen $-C = -x - 2y$ sujeta a

$$\begin{aligned} -3x - y &\leqslant -10 \\ -x - y &\leqslant -8 \\ -2x - 5y &\leqslant -25. \end{aligned}$$

Esta información se presenta en una tabla:

	x	y	x_1	x_2	x_3		
x_1	-3	-1	1	0	0	-10	(1)
x_2	-1	-1	0	1	0	-8	(2)
x_3	-2	(-5)	0	0	1	-25	(3)
C	-1	-2	0	0	0	0	(4)

Ahora se eliminan los valores negativos de la columna de la extrema derecha. El renglón (3) es el primero con un valor negativo en la

columna de la extrema derecha. Podría elegirse cualquiera de las dos primeras columnas como columna pivote. Se elige la segunda, haciendo que -5 sea el pivote. Los valores del renglón (3) se dividen entonces entre -5.

	x	y	x_1	x_2	x_3		
x_1	$-13/5$	0	1	0	$-1/5$	-5	Renglón (1) + 1 × renglón pivote (5)
x_2	$-3/5$	0	0	1	$-1/5$	-3	Renglón (2) + 1 × renglón pivote (6)
y	2/5	1	0	0	$-1/5$	5	Renglón pivote (4)
C	$-1/5$	0	0	0	$-2/5$	10	Renglón (4) + 2 × renglón pivote (7)

Sigue habiendo valores negativos en la columna de la extrema derecha, por lo que se procede a eliminarlos. El renglón (6) es ahora el primero con un valor negativo en la columna de la extrema derecha. Podría usarse la primera o la quinta columna como columna pivote. Se elige la primera. El valor positivo que está abajo de $-3/5$ servirá como pivote.

	x	y	x_1	x_2	x_3		
x_1	0	13/2	1	0	$-3/2$	55/2	Renglón (5) + (13/5) × pivote (9)
x_2	0	3/2	0	1	$-1/2$	9/2	Renglón (6) + (3/5) × pivote (10)
x	1	5/2	0	0	$-1/2$	25/2	Renglón pivote (8)
C	0	1/2	0	0	$-1/2$	25/2	Renglón (7) + (1/5) × pivote (11)

Puesto que la columna de la extrema derecha de esta tabla tiene sólo valores positivos, se empieza la aplicación del método símplex.

	x	y	x_1	x_2	x_3		
x_1	0	0	1	$-13/3$	2/3	8	Renglón (9) + (− 13/2) × renglón pivote
y	0	1	0	2/3	$-1/3$	3	Renglón pivote
x	1	0	0	$-5/3$	1/3	5	Renglón (8) + (− 5/2) × renglón pivote
C	0	0	0	$-1/3$	$-1/3$	11	Renglón (11) + (− 1/2) × renglón pivote

Puesto que todos los valores del último renglón (excepto el último) son negativos, la solución se lee en la tabla: $x_1 = 8$, $y = 3$, $x = 5$, $C = 11$, $x_2 = y$, $x_3 = 0$.

El método presentado en esta sección es el que se emplea con mayor frecuencia para resolver problemas de minimización con computadoras. Otro método popular implica la conversión de las columnas en renglones. Pero los problemas de programación lineal suelen tener más variables que restricciones. Es más fácil manejar una tabla con muchas columnas con una computadora que una con muchos renglones.

Existen otros casos que no se han tratado aquí. Como hay más de una manera de elegir la columna pivote en el método símplex, la

solución no es única. Al elaborar una tabla para el método símplex, puede haber un valor negativo en la columna de la extrema derecha, pero puede no haber ningún otro valor negativo en ese renglón. En el método símplex puede haber un valor positivo en el último renglón, pero ningún otro valor positivo en esa columna. Tales problemas no tienen solución.

Ejercicios

Los problemas 1-6 consistirán en resolver por medio del método símplex los problemas 7-12 de los ejercicios de la sección 9.1. Ver el ejemplo 1.

7. Encontrar los valores de x, y y z que minimicen $C = x + 2y + 3z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y + z &\geqslant 3 \\ x + y + 2z &\geqslant 5 \\ x + 3y + z &\geqslant 7. \end{aligned}$$

8. Encontrar los valores de x, y y z que minimicen $C = 3x + 2y + z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y + z &\geqslant 3 \\ x + y + 2z &\geqslant 5 \\ x + 3y + z &\geqslant 7. \end{aligned}$$

9. Encontrar los valores de x, y y z que minimicen $C = x + y + 2z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y + z &\geqslant 5 \\ 3x + y + z &\geqslant 7 \\ 2x + y + z &\geqslant 9. \end{aligned}$$

10. Encontrar los valores de x, y y z que minimicen $C = x + 3y + z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + y + 2z &\geqslant 3 \\ 2x + y + z &\geqslant 7 \\ x + y + 3z &\geqslant 11. \end{aligned}$$

11. Encontrar los valores de x, y y z que minimicen $C = 3x + 2y + 7z$ sujeta a

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 8z &\geqslant 7 \\ x + y + z &\geqslant 3 \\ 2x + y + 3z &\geqslant 4. \end{aligned}$$

*12. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 3x + y$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 3y &\leqslant 27 \\ 2 \\ 7x + 3y &\geqslant 63. \end{aligned}$$

*13. Encontrar los valores de x y y que maximicen $C = 2x + 3y$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\geqslant 6 \\ x + y &\leqslant 10. \end{aligned}$$

Revisión de capítulo

A las limitaciones sobre las variables de un problema de programación lineal se les llaman _____.

La función _____ es una fórmula de la cantidad que debe maximizarse o minimizarse.

A la región del plano en la que los puntos satisfacen todas las restricciones se le llama _____.

La solución de un problema de programación lineal siempre está en una _____ de la región factible.

Para resolver un problema de programación lineal con cuatro variables se usa el método _____.

Para escribir las restricciones como ecuaciones, se suma una variable x_1, llamada _____, al lado menor de la desigualdad.

A la tabla donde aparecen los valores de las variables en un problema de programación lineal se le llama _____.

Prueba de capítulo

Considérese el siguiente problema: Una salchichonería vende emparedados normales de jamón y queso y emparedados especiales de jamón y queso. Uno normal lleva seis rebanadas de jamón y dos de queso; uno especial lleva ocho rebanadas de jamón y tres de queso. La ganacia en un emparedado normal es de \$0.50 y en uno especial de \$0.60. Si hay suficiente jamón para sacar 1 000 rebanadas y suficiente queso para 360 rebanadas, ¿cuántos emparedados de cada tipo deben hacerse para obtener la utilidad máxima? Puede suponerse que se venderán todos los emparedados que se hagan.

1. ¿Cuál es el objetivo?
2. Identificar las variables.
3. Escribir la ecuación objetivo.

4. Escribir las restricciones.
5. ¿Son todas las variables mayores o iguales que cero?

Trazar la gráfica de las siguientes desigualdades.

6. $y > 2x - 4$
7. $y < \frac{1}{2}x + 7$
8. $x + 2y \leqslant 5$
9. $3x - 2y \geqslant 4$
10. $x + 1 > 3y$

Usar una gráfica para encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 3x + y$ sujeta a las restricciones dadas.

11. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
    $x \leqslant 4, y \leqslant 6$
    $2x + y \leqslant 10$
12. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
    $x + y \leqslant 6$
    $x + 3y \leqslant 12$

Usar una gráfica para encontrar los valores de x y y que minimicen $C = x + 3y$ sujeta a las restricciones dadas.

13. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
    $x \leqslant 4, y \leqslant 6$
    $2x + y \leqslant 4$
14. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$
    $x + y \leqslant 6$
    $x + 3y \leqslant 12$

15. Usar una gráfica para encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 5x + 7y$ sujeta a las restricciones dadas.

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0,$$
$$x \leqslant 6, y \leqslant 4$$
$$x + 3y \leqslant 15.$$

16. Usar una gráfica para resolver los problemas 1-5. Los problemas 17-19 se refieren al siguiente problema: Un restaurante vende un emparedado normal de ensalada de pollo y un emparedado dietético de ensalada de pollo. Cada emparedado normal requiere 1/2 taza de pollo y 1/4 de taza de aderezo. Cada emparedado dietético requiere 1/3 de taza de pollo y 1/8 de taza de aderezo. Deben usarse por lo menos 30 tazas de pollo y por lo menos 13 3/4 tazas de aderezo. Cuesta $0.80 hacer un emparedado normal y $0.90 (por el tiempo necesario para separar la grasa, etc.) hacer uno dietético. ¿Cuántos emparedados de cada tipo deberán hacerse para minimizar el costo?

17. Hacer la formulación matemática del problema.
18. Trazar la gráfica de la región factible.

19. Resolver el problema.

Resolver los problemas siguientes por el método símplex. Puede suponerse que x, y y z son mayores o iguales que cero.

20. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 3x + 2y$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\leqslant 8 \\ -3x + 2y &\leqslant 0. \end{aligned}$$

21. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 5x + 2y$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\leqslant 6 \\ y - x &\leqslant 2. \end{aligned}$$

22. Encontrar los valores de x y y que maximicen $P = 2x + 3y$ sujeta a

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\leqslant 7 \\ 3x + 4y &\leqslant 10. \end{aligned}$$

23. Encontrar los valores de x, y y z que maximicen $P = 2x + y + 3z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y + z &\leqslant 3 \\ x + y + 2z &\leqslant 5 \\ x + 3y + z &\leqslant 7. \end{aligned}$$

24. Encontrar los valores de x, y y z que maximicen $P = 2x + 7y + 6z$ sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &\geqslant 5 \\ 2x + 5y + 9z &\geqslant 7 \\ x + 3y + 4z &\geqslant 9. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Halmos, Paul. "The Legend of John von Neumann," *The American Mathematical Monthly*, Vol. 80 (1973), 382-394.

Kolata, Gina. "A Fast Way to Solve Hard Problems," *Science*, (Septiembre 21, 1984), 1379-1380. (Se expone el algoritmo de Karmarkar.)

Lee, Kil S. y Wayne Marx. "Demonstrating the Efficiency of Linear Programing," *The Mathematics Teacher*, Vol 76 No. 9 (Diciembre 1983), 664-666. (Se comparan las soluciones a un problema, con y sin técnica de programación lineal.)

Semmes, Pat. "A Geometric Approach to Linear Programming in the Two-Year College," *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 5 No. 1 (Invierno 1974), 37-40. (Se describe un modelo geométrico.)

Biografía — John von Neumann

John von Neumann, hijo de un banquero, nació en Hungría el 28 de diciembre de 1903. A los seis años de edad podía dividir mentalmente dos números de ocho dígitos. Estudió química en Berlín y Zurich y obtuvo el doctorado en matemáticas en 1926.

Impartió clases en Princeton y después en el Instituto de Estudios Avanzados de la misma universidad. Casó con Marietta Kovesi. Tuvieron una hija y se divorciaron en 1937. Von Neumann contrajo segundas nupcias con Klara Dán.

En las décadas de los treinta y los cuarenta trabajó en las áreas de mecánica cuántica, hidrodinámica, balística, meteorología, teoría de juegos, programación lineal y diseño de computadoras. Son varias las historias que sobre él se conocen a lo largo de los años. En cinco ocasiones, un científico trabajó hasta las 4:30 de la mañana con una calculadora de escritorio en un complicado problema. Cuando se lo presentó a Von Neumann, éste empezó a calcular mentalmente el resultado. Inclinó la cabeza para atrás murmurando para sí mismo, y en pocos minutos resolvió los cuatro primeros problemas. Antes de terminar el quinto, el científico, quien recordaba la respuesta, la dijo en voz alta. Von Neumann lo miró extrañado y continúo sus cálculos durante 30 segundos más, asombrándose de que el científico hubiera llegado primero a la respuesta correcta.

En 1944 conoció a Herman Goldstine, con quien discutió problemas relacionados con sus investigaciones. Von Neumann trabajaba en la bomba de hidrógeno y tenía la esperanza de que la gran rapidez del cálculo que Goldstine proyectaba para la computadora ENIAC sería de gran ayuda para él. Surgió en él el interés por las computadoras y en 1945 escribió un artículo en el que proponía la idea de un programa almacenado, el cual permitiría que las instrucciones se guardaran internamente hasta que se ejecutaran.

En 1955 sufrió una caída y se hirió. Cuando se le atendía, los doctores descubrieron que tenía cáncer en los huesos. Murió el 8 de febrero de 1957.

10

Probabilidad y estadística

En un grupo de 25 personas, la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido el mismo día es mayor de 1/2. Los mismos conceptos matemáticos empleados para calcular esta probabilidad se aplican en el estudio de los errores de las computadoras causados por una falla en los microcircuitos de memoria.

10.1 PROBABILIDAD

Si se compra una bolsa de botanas mixtas que dice "contiene menos del 80 por ciento de cacahuates" (que son relativamente baratos) y se encuentra que tenía 90 por ciento, ¿volvería a comprarse esa marca? ¿Habría la seguridad de que se tomó la decisión correcta? ¿Es posible que se haya elegido la única bolsa del estante con más cacahuates? Sin embargo, es imposible abrir todas las bolsas y pesar el contenido. La decisión debe tomarse a partir de datos incompletos. Situaciones similares se presentan en los negocios y la industria. La estadística inferencial es la rama de las matemáticas que estudia el proceso de llegar a conclusiones acerca de un conjunto y de evaluarlas cuando sólo es posible estudiar parte del conjunto.

Puesto que las predicciones basadas en datos de una parte de un conjunto no pueden hacerse con certeza absoluta, se aplican las leyes de la probabilidad. La palabra *experimento* es de uso común en probabilidad para referirse a una acción que está en estudio. El lanzamiento de una moneda o de un dado, o sacar una carta de un mazo barajado de 52 naipes son ejemplos de experimentos. Con cada experimento se asocia un resultado.

Definición

El *espacio muestral* de un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles. Cada elemento del espacio muestral se llama *punto muestral*.

Ejemplo 1

¿Cuál es el espacio muestral al lanzar una moneda?

Solución

Puesto que la moneda tiene cara o cruz, se dice que {Cara, Cruz} o $\{H, T\}$ es el espacio muestral.

Ejemplo 2

¿Cuál es el espacio muestral al lanzar tres monedas?

Solución

Puesto que cada moneda puede mostrar cara o cruz, deberán enlistarse todos los resultados posibles. Podrían tenerse cualesquiera de los siguientes resultados: $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$. (El patrón es muy semejante al listado de las V y las F en una tabla de verdad.)

Si todos los puntos muestrales tienen las mismas posibilidades de ocurrir, se dice que los puntos muestrales son *igualmente probables*. En el ejemplo 2, *HHH*, *HTH* y *THH* se consideraron eventos diferentes, por lo que todos los puntos del espacio muestral eran igualmente probables. Si el espacio muestral se enlistara como 1 cara, 2 caras o 3 caras (es decir, $\{1H, 2H, 3H\}$), los eventos no serían igualmente probables. Es aconsejable enlistar, de ser posible, espacios muestrales que contengan eventos igualmente probables.

La probabilidad de un evento es una fracción que indica qué tan posible es su ocurrencia. Se dice que un experimento es exitoso si ocurre el evento en estudio. Considérese el lanzamiento de una moneda. Si se quiere la probabilidad de obtener una cara, se dice que "obtener una cara" es el evento en estudio. Si se estudiaran las partes defectuosas de una línea de ensamble, se consideraría que el experimento es exitoso si se encuentra un parte defectuosa.

Definición

La *probabilidad* de un evento A (denotada por $P(A)$) es el número de resultados exitosos en el espacio muestral dividido entre el número total de resultados en el espacio muestral, si todos los resultados son igualmente probables.

Ejemplo 3

¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara en un lanzamiento de una moneda regular?

Solución

Decir que una moneda es "regular" significa que los posibles resultados son igualmente probables. Puesto que hay dos puntos muestrales en el espacio muestral $\{H, T\}$, y uno de ellos (H) es exitoso, la probabilidad de obtener cara es de 1/2 o 0.5.

Ejemplo 4

¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara al lanzar tres monedas regulares?

Solución

El espacio muestral se dio en el ejemplo 2. Puesto que hay ocho resultados y siete de ellos tienen por lo menos una H, la probabilidad de obtener al menos una cara es de 7/8 o 0.875.

Ejemplo 5

¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente una cara al lanzar tres monedas regulares?

Solución

Remitiéndose al espacio muestral enlistado en el ejemplo 2, se observará que hay tres resultados que tienen exactamente una H. Éstos son *HTT*, *THT* y *TTH*. Puesto que hay un total de ocho puntos en el espacio muestral, la probabilidad de obtener exactamente una cara es de 3/8 o 0.375.

La probabilidad menor que puede presentarse es 0. La probabilidad de un evento es 0 si no hay resultados exitosos en el espacio muestral. La mayor probabilidad que puede presentarse es 1. La probabilidad de un evento es 1 cuando todos los puntos del espacio muestral son resultados exitosos. La suma de las probabilidades de todos los puntos del espacio muestral es 1. Si la probabilidad de que ocurra el evento A se da por $P(A)$, entonces la probabilidad de que A *no* ocurra es de $1 - P(A)$.

Ejemplo 6

Encontrar la probabilidad:

(a) De obtener un 7 en un lanzamiento de un solo dado regular.
(b) De obtener un número menor que 7 al tirar un dado regular.
(c) De no obtener un 4 en un lanzamiento de un solo dado regular.

Solución

El espacio muestral es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) No hay resultados exitosos en el espacio muestral. La probabilidad de obtener un 7 es de $0/6 = 0$.
(b) Hay seis resultados exitosos en el espacio muestral. La probabilidad de obtener un número menor que 7 es de $6/6 = 1$.
(c) La probabilidad de obtener un 4 es de $1/6$, de modo que la probabilidad de *no* obtener un 4 es de $1 - 1/6 = 5/6$.

Supóngase que se saca una carta de un mazo barajado de 52 naipes. Para encontrar la probabilidad de que el naipe que se sacó sea una sota o un corazón, podría examinarse el espacio muestral completo. Hay 13 corazones y tres sotas, además de la sota de corazones (que ya está considerada en los 13 corazones). Es decir, hay 16 resultados exitosos, de modo que la probabilidad es de $16/52 = 4/13$. Sin embargo, cuando se quiere encontrar la probabilidad de un evento A o B, podría ser más sencillo llegar a la respuesta si se parte de las probabilidades individuales de los eventos, en lugar de examinar el espacio muestral completo. En este ejemplo, la probabilidad de sacar un corazón es de $13/52$, y la de sacar una sota es de $4/52$. Sacar la sota de corazones se consideró como un resultado exitoso al calcular ambas probabilidades. Esta "doble consideración" se compensa en la respuesta final: P (sota o corazón) $= 13/52 + 4/52 - 1/52$.

Regla 1 de probabilidad

Si A y B son eventos del mismo espacio muestral, entonces $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$.

Ejemplo 7

Encontrar la probabilidad de sacar una carta roja o con figura de un mazo barajado de 52 naipes.

Solución

Hay 26 cartas rojas, de modo que P (roja) $= 26/52$. Hay 12 figuras (una J, una Q y un K de cada palo), de modo que P (figura) $= 12/52$. Hay seis cartas rojas que también son figuras, así que P (roja y figura) $= 6/52$. Por lo tanto, P (roja o figura) $= 26/52 + 12/52 - 6/52 = 8/13$.

Ejemplo 8

Encontrar la probabilidad de obtener un número divisible entre 2 o 3 en un lanzamiento de un dado.

Solución

Los números divisibles entre 2 son 2, 4 y 6, de modo que la probabilidad de obtener un número divisible entre 2 es de 3/6. Los números divisibles entre 3 son 3 y 6, de modo que la probabilidad de obtener un número divisible entre 3 es de 2/6. El único número divisible tanto entre 2 como entre 3 es 6, y la probabilidad de obtener un 6 es de 1/6. La probabilidad de obtener un número divisible entre 2 o 3 es de $3/6 + 2/6 - 1/6$ o $4/6 = 2/3$.

Ejemplo 9

Encontrar la probabilidad de obtener un diamante o un trébol al sacar una carta de un mazo barajado de 52 naipes.

Solución

Hay 13 diamantes, de modo que P (diamante) = 13/52. Hay trece tréboles, de modo que P (trébol) = 13/52. No es posible sacar simultáneamente un diamante y un trébol, así que P (diamante y trébol) = 0. La probabilidad de sacar un trébol o un diamante es de $13/52 + 13/52 - 0 = 26/52 = 1/2$ o 0.5.

Cuando no es posible que ocurran de manera simultánea dos eventos A y B, se dice que A y B son mutuamente excluyentes, y $P(A$ y $B) = 0$.

Ejercicios

Determinar el espacio muestral de los experimentos siguientes. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. El lanzamiento de un dado regular.
2. Con los ojos vendados sacar una canica de una caja que contiene seis canicas rojas y cinco blancas.
3. Con los ojos vendados sacar una canica de una caja que contiene tres canicas rojas, cuatro blancas y seis azules.
4. Sacar una carta de un mazo barajado de 52 naipes que sólo contiene diamantes.
5. Sacar una carta de un mazo barajado de 52 naipes que sólo contiene figuras (sin contar los ases).
6. Tener una familia de dos hijos (especificar el sexo de cada uno).
7. Tener una familia de tres hijos (especificar el sexo de cada uno).
8. Sacar una moneda de una caja que contiene una moneda de 100, una de 50 y una de 20 pesos.

9. Sacar dos monedas de una caja que contiene una moneda de 100, una de 50 y una de 20 pesos. (Sugerencia: hay seis resultados posibles.)
10. Sacar dos monedas de una caja que contiene una moneda de 100, una de 50, una de 20 y una de 10 pesos. (Sugerencia: hay doce resultados posibles.)

Encontrar la probabilidad de los eventos siguientes. Ver los ejemplos 3, 4 y 5.

11. Obtener un 4 en un lanzamiento de un dado regular.
12. Sacar una canica roja con los ojos vendados de una caja que contiene cinco canicas rojas y cuatro azules.
13. Con los ojos vendados sacar una canica roja de una caja que contiene cuatro canicas rojas, tres blancas y dos azules.
14. Sacar una figura de un mazo barajado de 52 naipes.
15. Sacar un diamante de un mazo barajado de 52 naipes.
16. Sacar un as de espadas de un mazo barajado de 52 naipes.
17. Sacar una moneda de 10 pesos de una caja que contiene una moneda de 100, una de 50 y una de 10 pesos.
18. Sacar una moneda de 100 y una de 50 pesos de una caja que contiene una moneda de 100, una de 50 y una de 20 pesos. (Sin importar cuál sea la primera.)
19. Sacar una moneda de 50 y una de 20 pesos de una caja que contiene una moneda de 100, una de 50 y una de 20 pesos. (Sin importar cuál sea la primera.)
20. Sacar una moneda de 20 y una de 10 pesos de una caja que contiene una moneda de 100, una de 50, una de 20 y una de 10 pesos. (Sin importar cuál sea la primera.)

Encontrar la probabilidad de los eventos siguientes. Ver el ejemplo 6.

21. Con los ojos vendados sacar una canica negra de una caja que contiene seis canicas rojas y cinco blancas.
22. Sacar una carta roja de un mazo barajado de 52 naipes que sólo contiene diamantes.
23. Sacar al menos 5 centavos de una caja que contiene una moneda de 5, una de 10 y una de 25 centavos.
24. Sacar al menos 25 centavos de una caja que contiene una moneda de 1, una de 5 y una de 10 centavos.
25. No sacar una moneda de 25 centavos de una caja que contiene una moneda de 1, una de 5, una de 10 y una de 25 centavos.

Encontrar la probabilidad de los eventos siguientes. Ver los ejemplos 7, 8 y 9.

26. Sacar un número par o uno mayor que 4 en un lanzamiento de un dado regular.
27. Sacar un número impar o uno primo en un solo lanzamiento de un dado regular.
28. Sacar un número par o uno primo en un solo lanzamiento de un dado regular.

29. Sacar un diamante o un reina de un mazo barajado de 52 naipes.
30. Sacar una carta negra o un rey de un mazo barajado de 52 naipes.
31. Sacar un rey rojo o una reina negra de un mazo barajado de 52 naipes.
32. Sacar un 7 o una figura de un mazo barajado de 52 naipes.
*33. Juan tiene tres tarjetas:una roja en ambos lados, otra azul también en ambos lados y una roja por un lado y azul por el otro. Juan le dice a Pedro que si saca (sin mirar) una de las tarjetas de una caja y la pone sobre una mesa, él podrá adivinar de qué color es el otro lado. Si Juan acierta, Pedro le dará un caramelo; si se equivoca, Juan le dará uno a Pedro. Juan asegura que como el lado oculto es rojo o azul, la probabilidad que tiene de acertar es de sólo 0.50. ¿Es correcto su análisis?
*34. La *probabilidad en favor* de que ocurra un evento se define por el número de resultados exitosos posibles divididoentre el número de resultados no exitosos posibles.

(a) Si la probabilidad en favor de que ocurra un evento es de 1/1, ¿cuál es la probabilidad del evento?
(b) Si la probabilidad de un evento es de 3/4, ¿cuál es la probabilidad en contra?

*35. Encontrar la probabilidad en favor de acertar en el color correcto del problema 33, tomando en cuenta que Juan siempre dice el color de la cara que se presenta.

10.2. PRINCIPIOS DE CONTEO

Puesto que para calcular una probabilidad se requiere saber cuántos resultados posibles tiene un evento, es útil conocer ciertas reglas denominadas "principios de conteo". Supóngase que se lanza una moneda y se arroja un dado. Hay doce resultados posibles en este experimento, los cuales son $\{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$. Hay dos resultados en el lanzamiento de la moneda, seis al arrojar el dado y $2 \cdot 6$ en el experimento completo. Al generalizar el procedimiento anterior, se obtiene la fórmula siguiente.

Principio fundamental de conteo

Si una operación puede efectuarse de m maneras y una segunda operación puede hacerse de n maneras, entonces juntas pueden hacerse de $m \cdot n$ maneras.

Ejemplo 1

¿Dé cuántas maneras pueden colocarse juntas dos letras si la primera debe ser una consonante y la segunda una vocal?

Solución

Hay 21 consonantes y 6 vocales. Por lo tanto, hay $21 \cdot 6 = 126$ posibilidades.

Ejemplo 2

¿Cuántos resultados hay al lanzar dos dados?

Solución

El primer dado puede caer de seis maneras, y el segundo, a su vez, puede caer también de seis maneras. Por lo tanto, ambos dados pueden caer $6 \cdot 6 = 36$.

Ejemplo 3

¿De cuántas maneras puede hacerse un código que conste de dos letras seguidas de tres dígitos, permitiéndose que los dígitos se repitan, pero no las letras?

Solución

La primera letra puede elegirse de 26 maneras, pero una vez escogida no puede repetirse. Por tanto, tan sólo quedan 25 elecciones para la segunda. El primer dígito puede ser 0-9, de modo que hay 10 elecciones. Hay además 10 elecciones para el segundo dígito y 10 para el tercero, ya que se permiten las repeticiones. Por tanto, hay $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 650\,000$ maneras de hacer el código.

Con frecuencia, los problemas de probabilidad se refieren a las disposiciones posibles de un grupo de objetos. En matemáticas, las disposiciones se denominan *permutaciones*. Considérense las letras *A*, *B* y *C*. Se pueden ordenar de las siguientes maneras: *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CAB* o *CBA*. Se dice entonces que existen seis permutaciones. El seis puede escribirse como $3 \cdot 2 \cdot 1$. Es decir, hay tres maneras diferentes de elegir la primera letra de la disposición, pero una vez que se ha elegido, quedan dos alternativas de elección para la segunda letra. Una vez elegida ésta, sólo queda una elección para la tercera. El símbolo ! se denomina *factorial*. La expresión $n!$ (donde n es un entero positivo) indica el producto de todos los enteros positivos menores o iguales que n. Por tanto, $3!$ (léase *tres factorial)* significa $3 \cdot 2 \cdot 1$ o 6.

Definición

El número de permutaciones de n objetos distintos es $n!$.

Ejemplo 4

¿De cuántas maneras pueden finalizar cinco corredores en una carrera si no hay empates?

Solución

El número de posiciones que pueden ocupar los cinco corredores es $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ejemplo 5

¿De cuántas maneras pueden ordenarse seis libros diferentes en un estante?

Solución

El número de disposiciones de los seis libros es $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Supóngase que una persona tiene espacio para tres de los seis libros del ejemplo 5. Podría entonces escoger cualquiera de los seis para colocarlos en el primer sitio del estante. Quedarían cinco libros entre los cuales elegiría el que ocuparía el segundo sitio. El tercer libro tendría que elegirse entre los cuatro restantes. Es decir, hay $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ disposiciones posibles. Puesto que se han usado sólo tres de los seis libros, se ha encontrado el número de permutaciones de seis objetos *tomados tres a la vez*. En lugar de multiplicar todos los números menores que seis, sólo se han multiplicado tres de ellos. Generalizando este resultado se obtiene una fórmula.

Definición

El número de permutaciones de n objetos distintos tomados r a la vez (denotado por ${}_nP_r$), es $n! \,/\, (n - r)!$.

Al escribirse $n! \,/\, (n - r)!$ se quiere decir que los últimos $(n - r)$ factores del producto del numerador se cancelarán en la división, de modo que sólo quedarán r factores. Los matemáticos definen que $0! = 1$, de tal manera que la fórmula es correcta para todos los casos.

Ejemplo 6

¿Cuántos códigos de tres caracteres pueden formarse a partir de las letras A-E, si no se permiten repeticiones?

Solución

Hay cinco letras de las que pueden tomarse tres a la vez, de modo que ${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ejemplo 7

Si cinco personas pertenecen a un comité, ¿cuántas maneras hay de elegir un presidente y un secretario?

Solución

Hay cinco personas de las que se pueden tomar dos a la vez, así que ${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Si se hace una lista de todas las permutaciones de las letras A, B y C tomando dos a la vez, se tendrá AB, AC, BA, BC, CA y CB. Aquí se considera que AB y BA son disposiciones diferentes (al igual que AC y CA o BC y CB). Sólo hay tres parejas distintas en este ejemplo, si no se toma en cuenta el orden. Las disposiciones de n objetos distintos tomados r a la vez *sin considerar el orden*, reciben el nombre de *combinaciones*.

Definición

El número de combinaciones de n objetos distintos tomados r a la vez (denotado por ${}_nC_r$) está dado por $n! \,/\, ((n - r)!\, r!)$.

En la práctica, esta fórmula es más fácil de aplicar de lo que parece. El $(n - r)!$ cancelará los últimos $n - r$ factores del producto del numerador al dividir, dejando solamente r factores. El $r!$ también producirá r factores en el denominador. Es fácil escribir el numerador empezando con n y multiplicando sucesivamente números menores hasta que haya r factores, y escribir el denominador empezando con 1 y multiplicando sucesivamente factores mayores hasta que haya r factores.

Ejemplo 8

¿De cuántas maneras puede elegirse un comité de tres personas a partir de un grupo de cinco personas?

Solución

Puesto que la integración de un comité no depende del orden en el que se elija a sus miembros, se encuentra que ${}_5C_3 = (5 \cdot 4 \cdot 3)/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 10$.

Ejemplo 9

¿De cuántas maneras se pueden elegir dos de siete libros para prestarlos a un amigo?

Solución

El orden en que se elijan los libros no es importante. Se calcula ${}_7C_2 = (7 \cdot 6)/(1 \cdot 2) = 21$.

Las reglas de conteo con frecuencia son útiles para calcular probabilidades.

Ejemplo 10

Si una contraseña para tener acceso a una computadora sigue el patrón letra-dígito-letra-dígito (por ejemplo R2D2), ¿cuál es la probabilidad de adivinarla en el primer intento?

Solución

El principio fundamental de conteo establece que hay $26 \cdot 10$ $26 \cdot 10$ contraseñas posibles, por lo que la probabilidad de acertar en el primer intento es 1/67 600.

Ejemplo 11

Si en una línea de montaje hay 500 baterías y dos de ellas están defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que al probar dos de ellas se elijan las dos defectuosas?

Solución

No es importante el orden en el que se prueben las baterías. Por lo tanto, hay ${}_{500}C_2 = (500 \cdot 499)/(1 \cdot 2) = 124\,750$ formas de elegir dos de 500 baterías. Sólo en una de estas combinaciones se encontrarán las dos defectuosas. La probabilidad de obtener las dos defectuosas es 1/124 750.

Ejemplo 12

Si un candado tiene una combinación de tres dígitos, y sólo se recuerda que ninguno de ellos es mayor que cinco y que todos son diferentes, ¿cuál es la probabilidad de abrir el candado en el primer intento?

Solución

Puesto que los dígitos por elegir son de 0 al 5 y el orden sí es importante, se considera que hay ${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ posibilidades. La probabilidad de acertar a la combinación correcta en el primer intento es 1/120.

Ejercicios

Aplicar el principio fundamental de conteo para determinar el número total de formas en que pueden ocurrir los eventos siguientes. Ver los ejemplos 1 al 3.

1. El lanzamiento de tres dados.
2. El lanzamiento de cinco monedas.
3. Escribir un número de tres dígitos (el primero $\neq 0$).

4. Escribir un número de tres dígitos sin repetición.
5. Escribir un número par de tres dígitos (el primero $\neq 0$ y puede haber repeticiones).
6. Escribir un código de dos letras seguidas por tres dígitos, sin repetir caracteres y con el cero pudiendo ocupar cualquiera de las tres posiciones.
7. Escribir un código de dos letras seguidas por tres dígitos, si se permiten las repeticiones.
8. Escribir un número de tres dígitos menor que 400.
9. Escribir un número de tres dígitos menor que 400 y divisible entre cinco.
10. Escribir un código de tres letras usando A-H, si se permiten las repeticiones.

Determinar el número total de formas en que pueden ocurrir los eventos siguientes. Ver ejemplos 4 y 5.

11. Formar un número con los dígitos $\{1, 2, 3, 4\}$ sin repeticiones.
12. Ordenar cuatro libros en un estante.
13. Estacionar tres automóviles en tres lugares.
14. Acomodar cinco personas en una fila.
15. Ordenar las letras de la A a la F.
16. Ordenar una mesa de aparador con siete artículos en fila.
17. Ordenar seis botellas en fila en una barra.
18. Asignar cinco clases a cinco salones.
19. Ordenar cuatro latas de frutas en un estante.
20. Hacer el programa para seis ponentes en una conferencia.

Determinar el número total de formas en que pueden ocurrir los eventos siguientes. Ver ejemplos 6 y 7.

21. Formar un número de tres dígitos con los dígitos $\{1, 2, 3, 4\}$ sin repeticiones.
22. Ordenar dos de cuatro libros tomados de un estante.
23. Estacionar un automóvil en uno de tres lugares.
24. Acomodar cuatro de cinco personas.
25. Ordenar las letras A - F tomadas de tres en tres.
26. Ordenar cuatro de siete artículos en fila sobre una mesa de aparador.
27. Ordenar tres de cuatro botellas en fila en una barra.
28. Ordenar un horario escolar para cursar dos de cinco materias.
29. Ordenar dos de cuatro latas en un estante.
30. Ordenar un programa con cuatro de seis ponentes en una conferencia.

Determinar el número total de formas en que pueden ocurrir los eventos siguientes. Ver ejemplos 8 y 9.

31. Elegir dos letras del conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$.
32. Elegir tres monedas si se tiene una moneda de 100, una de 50, una de 20 y una de 10 pesos.

33. Hacer el calendario de un torneo de tenis con ocho jugadores, si cada uno de ellos deberá enfrentarse a todos los demás.
34. Hacer el calendario de una temporada con diez equipos de tal modo que cada uno se enfrente una sola vez con los demás.
35. Elegir tres de ocho personas para un comité.
36. Elegir tres de siete personas para un comité.
37. Sacar dos calcetines de un cajón que contiene diez.
38. Elegir tres caramelos de una máquina que tiene nueve.
39. Comprar dos lámparas de un lote de cuatro.
40. Elegir tres de ocho pizzas.
⇒41. Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que muestre un algoritmo para calcular $n!$
*42. Encontrar el número de ordenamientos para sentar cuatro personas en una mesa redonda.
*43. El número de combinaciones de n objetos, de los cuales m son indistinguibles, está dado por $n!/m!$ Por ejemplo, el número de combinaciones de las letras de la palabra *Mississippi* está dado por $11!/ 4! 4! 2!$). Explicar por qué funciona esta regla.
*44. ¿Cuántos divisores tiene 2 520?
*45. ¿Cuántos ceros hay al final de 80!?
*46. ¿Qué sugiere la fórmula de nC_3 acerca del producto de tres enteros positivos consecutivos?

10.3. EVENTOS INDEPENDIENTES Y PROBABILIDAD CONDICIONAL

Al lanzar una moneda al aire, la probabilidad de obtener una cara es de 1/2. Si se lanza la moneda una segunda vez, la probabilidad de obtener una cara también es de 1/2. En la moneda no hay nada que permita saber cuáles fueron los resultados anteriores; cada lanzamiento representa un nuevo comienzo con resultados igualmente probables de cara o cruz. Se dice que los dos eventos son independientes.

Definición

Dos eventos son independientes si el resultado del primero no influye en el resultado del segundo.

Los eventos independientes pueden ocurrir juntos o en sucesión. La probabilidad de obtener dos caras es la misma ya sea que se arrojen dos monedas a la vez o que se lance una moneda dos veces seguidas. El espacio muestral de cualesquiera de estos dos eventos puede representarse como $\{HH, HT, TH, TT\}$, y la probabilidad de obtener dos caras es de 1/4. La probabilidad de que *ambos* eventos independientes ocurran depende de sus probabilidades individuales.

Regla 2 de probabilidad

Dados dos eventos independientes A y B, la probabilidad de que ambos ocurran (ya sea simultánea o sucesivamente) está dada por la fórmula: $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ejemplo 1

Encontrar la probabilidad de sacar un doble (por ejemplo, dos números iguales) en un solo lanzamiento de un par de dados regulares.

Solución

No es importante el resultado del primer dado, de modo que la probabilidad de un resultado exitoso es 1. Sin embargo, sólo hay una manera entre seis para que el resultado del segundo dado sea igual. La probabilidad de éxito es de 1/6. Por tanto, la probabilidad de que ambos eventos ocurran es de $1 \cdot 1/6 = 1/6$.

Ejemplo 2

¿Cuál es la probabilidad de obtener cinco caras consecutivas al lanzar una moneda?

Solución

Cada lanzamiento es independiente de los demás, y P (caras) $= 1/2$ para cada uno de ellos. Por lo tanto, P (5 caras) $= (1/2)^5 = 1/32$.

Ejemplo 3

¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases consecutivos de un mazo barajado de 52 naipes, si el primer naipe se reintregra al mazo antes de sacar el segundo?

Solución

P (as) $= 4/52 = 1/13$ cada vez que se saca un naipe. P (dos ases) $= (1/13)(1/13) = 1/169$.

Si el primer naipe no se reintegra al mazo, la extracción del segundo naipe estaría afectada por la primera. Si la primera carta fuera un as, sólo quedarían tres ases entre las 51 restantes, de modo que P (as) $= 3/51$ en la segunda ocasión. Por otra parte, si la primera carta no fuera un as, entonces P (as) $= 4/51$ en la segunda extracción. Este ejemplo ilustra el concepto de probabilidad condicional. La probabilidad de los dos eventos se calcula con base en la condición de que el primer resultado sea exitoso. La probabilidad se denota por $P(B \mid A)$ y se lee: "la probabilidad de B, dado A".

Regla 3 de probabilidad

Dados dos eventos dependientes A y B, la probabilidad de que ambos ocurran (ya sea simultánea o sucesivamente) está dada por la fórmula: $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Ejemplo 4

¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases de un mazo barajado de 52 naipes, si el primer naipe no se reintegra antes de sacar el segundo?

Solución

Al sacar el primero, P (as) = 4/52 = 1/13. Al sacar el segundo, suponiendo que se sacó un as la primera vez, P (as) = 3/51 = 1/17, de modo que P (dos ases) = (1/13) (1/17) = 1/221.

Ejemplo 5

Si se lavan cuatro calcetas negras, seis azules y dos cafés:

(a) ¿cuál es la probabilidad de que las dos primeras calcetas que se saquen de la lavadora sean cafés?;
(b) ¿cuál es la probabilidad de que las dos primeras calcetas que se saquen de la lavadora sean azules?

Solución

(a) Puesto que hay dos calcetas cafés entre doce, P (café) = 2/12 = 1/6 para la primera calceta. Suponiendo que es café, entonces sólo queda otra calceta café entre once, de modo que P (café) = 1/11 para la segunda calceta. La probabilidad de que ambas calcetas sean cafés es de (1/6) (1/11) = 1/66.
(b) Puesto que hay seis calcetas azules entre doce, P (azul) = 6/12 = 1/2 para la primera calceta. Suponiendo que es azul, entonces quedan cinco calcetas azules entre once, de modo que P (azul) = 5/11 para la segunda calceta. La probabilidad de que ambas calcetas sean azules es de (1/2) (5/11) = 5/22.

Si se arroja una moneda diez veces y se obtienen nueve caras, la probabilidad de obtener una cara al siguiente lanzamiento es de 1/2. Recuérdese que todos los lanzamientos, incluyendo el décimo, son eventos independientes cuya probabilidad es de 1/2. Muchas personas piensan erróneamente que es mayor la probabilidad de obtener cruces, ya que en un experimento de lanzar una moneda diez veces la probabilidad de obtener diez caras consecutivas es pequeña. La probabilidad de que de los nueve primeros lanzamientos resulten caras

es de 1/512. Sería de esperarse que a nueve caras siguiera una cara más la mitad de las veces y una cruz también la mitad de las veces. La ley de los promedios (también conocida como ley de los números grandes y como ley de Bernoulli) establece que si se repite este experimento (lanzar una moneda diez veces) en muchas ocasiones, se obtendrán diez caras en aproximadamente 1/1 024 de los intentos. Es decir, la ley de los promedios permite predecir el resultado promedio si un experimento se efectúa un gran número de veces. No permite predecir el resultado de un experimento.

Las compañías de seguros pueden establecer sus políticas con base en este principio. Si un hombre de 35 años de edad quiere contratar un seguro de vida de $100 000.00, la compañía de seguros no puede predecir si *él* morirá o no en los próximos diez años. Pero puede predecir el porcentaje de los hombres de 35 años de edad que morirán en los próximos diez años. Aseguran a muchos hombres de 35 años y las primas se fijan a partir de las estadísticas.

Ejercicios

Encontrar la probabilidad de los eventos siguientes. Ver los ejemplos 1, 2 y 3.

1. Obtener dos números impares en un lanzamiento de un par de dados regulares.
2. Obtener una suma de 12 en un lanzamiento de un par de dados regulares.
3. Obtener un 2 en el primer dado y 3 en el segundo cuando se lanza un par de dados regulares.
4. Obtener una cara seguida de dos cruces en tres lanzamientos de una moneda regular.
5. Obtener dos cruces seguidas de dos caras en cuatro lanzamientos de una moneda regular.
6. Obtener alternadamente caras y cruces (empezando con una cara) en cuatro lanzamientos de una moneda regular.
7. Tener tres niños consecutivos si la probabilidad de que un bebé sea varón es de 0.51.
8. Tener tres niñas consecutivas si la probabilidad de que un bebé sea niña es de 0.49.
9. Tener un niño seguido de una niña si la probabilidad de tener un niño es 0.51 y la de tener una niña es 0.49.
10. Sacar dos cartas rojas consecutivas de un mazo barajado de 52 naipes si la primera se reintegra.
11. Sacar un diez de un mazo barajado de 52 naipes seguido por una carta mayor (J, Q, K o A) si la primera carta se reintegra.
12. Sacar un trébol seguido de un rey de un mazo barajado de 52 naipes si la primera carta se reintegra.
13. Sacar (sin mirar) dos calcetas azules de un cajón que contiene dos calcetas azules, cuatro negras y seis cafés, si la primera calceta se vuelve a meter al cajón.

14. Sacar (sin mirar) dos calcetas cafés de un cajón que contiene dos calcetas azules, cuatro negras y seis cafés, si la primera calceta se vuelve a meter al cajón.
15. Sacar (sin mirar) una calceta azul seguida de una café de un cajón que contiene dos calcetas azules, cuatro negras y seis cafés, si la primera calceta se vuelve a meter al cajón.

Encontrar la probabilidad de los eventos siguientes. Ver los ejemplos 4 y 5.

16. Sacar dos cartas rojas consecutivas de un mazo barajado de 52 naipes si la primera no se reintegra.
17. Sacar un diez de un mazo barajado de 52 naipes seguido por una carta mayor (J, Q, K o A), si la primera carta no se restituye.
18. Sacar un trébol seguido de una espada de un mazo barajado de 52 naipes si la primera carta no se restituye.
19. Sacar (sin mirar) dos calcetas azules de un cajón que contiene dos calcetas azules, cuatro negras y seis cafés, si la primera calceta no se vuelve a meter en el cajón.
20. Sacar (sin mirar) dos calcetas cafés de un cajón que contiene dos calcetas azules, cuatro negras y seis cafés, si la primera calceta no se vuelve a meter en el cajón.
21. Sacar (sin mirar) una calceta azul seguida de una café de un cajón que contiene dos calcetas azules, cuatro negras y seis cafés, si la primera calceta no se vuelve a meter en el cajón.
22. Ganar el primer premio y un amigo el segundo, en una rifa, si cada uno compra uno de los 5 000 boletos en juego.
23. Ganar el primero y el segundo premios si se compran dos de los 5 000 boletos en juego.
24. Ganar el primer premio y un amigo el segundo en una rifa si cada uno compra cinco de los 5 000 boletos en juego.
25. Ganar el segundo premio y un amigo el tercero en una rifa si cada uno compra uno de los 5 000 boletos en juego. (Sugerencia: ninguno de los dos puede ganar el primer premio.)
26. Sacar dos baterías defectuosas de un lote de cinco en los dos primeros intentos, si dos de ellas están defectuosas.
27. Sacar dos baterías defectuosas de un lote de cinco en el segundo y tercer intentos, si dos de ellas están defectuosas. (Sugerencia: la primera debe estar en buen estado.)
28. Sacar dos baterías defectuosas de un lote de cinco en el tercer y cuarto intentos, si dos de ellas están defectuosas. (Sugerencia: la primera y la segunda deben estar en buen estado.)
29. Sacar dos baterías defectuosas de un lote de cinco en el primero y cuarto intentos, si dos de ellas están defectuosas.
30. Sacar dos baterías defectuosas de un lote de cinco en el primero y quinto intentos, si dos de ellas están defectuosas.

Encontrar la probabilidad de los eventos siguientes.

*31. (a) Sacar una suma de 3 u 11 en una tirada de un par de dados regulares.

(b) Sacar una suma menor que 11 en una tirada de un par de dados regulares.

*32. Sacar un rey seguido de un trébol de un mazo barajado de 52 naipes si la primera carta no se restituye.

*33. Sacar por lo menos dos reyes de un mazo barajado de 52 naipes en tres intentos (sin restituir ninguna de las cartas).

*34. Sacar más caras que cruces en cuatro lanzamientos de una moneda regular.

*35. En un grupo de r personas, la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día se calcula por: $1 - P$ (todos los cumpleaños son diferentes).

(a) Calcular la probabilidad de que al menos dos personas de un grupo de tres tengan el mismo cumpleaños.

(b) Para grupos mayores, la probabilidad, p, puede aproximarse por la fórmula $p = 1 - e^{-r(r-1)/(2(365))}$, en la que los cálculos son más sencillos. ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de treinta personas por lo menos dos cumplan años el mismo día?

*36. * En la programación de computadoras una "palabra" es el mayor número de bits que pueden transferirse en una operación. Dependiendo de la computadora, una palabra puede tener de 8 a 60 bits. Ocasionalmente, un bit se transfiere de manera incorrecta. A fin de detectar tales errores, se incluyen uno o más bits adicionales, llamados "de paridad", en la representación codificada de un carácter. Para una paridad par, los bits adicionales se eligen de tal modo que la suma de los bits de cualquier carácter sea par. Entonces, un solo error puede detectarse con facilidad. Sin embargo, si ocurren dos o más errores en la misma palabra, es difícil detectarlos. Si se cometen r errores, la probabilidad de que al menos dos de ellos ocurran en la misma palabra se calcula de la misma manera que la probabilidad del cumpleaños (ver el problema 35). En lugar de los 365 días, se usa el número de palabras que es posible tener en memoria.

(a) ¿Cuántas palabras de 32 bits es posible tener en una memoria de 2 megabytes (2^{20})?

(b) Modificar la fórmula del problema 35 para las condiciones descritas en este problema.

(c) Si hay 500 errores, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos ocurran en la misma palabra?

(d) Si la ocurrencia promedio de un error es de uno cada 35.7 días, y se requiere un promedio de 642 errores para producir dos errores en la misma palabra, ¿cuánto tiempo se esperaría que funcionara computadora antes de que dos errores ocurran en la misma palabra?

* Este problema se basa en la información del artículo "The Reliability of Computer Memories", de Robert J. McEliece, publicado en *Scientific American*, vol. 252, núm 1 (enero de 1985) págs. 88-95.

10.4. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Si las calificaciones de un alumno en matemáticas son 85, 93, 87, 89 y 86 en un semestre, seguramente el profesor dirá que su calificación semestral es 88, el cual es el *promedio* de estas calificaciones. Algunas calificaciones son mayores que 88 y algunas son menores que 88; 88 es la calificación típica que representa la lista completa, ya que sus valores se agrupan alrededor de 88. El promedio es una *medida de tendencia central*. Se considerarán tres diferentes promedios o medidas de tendencia central. La que se usó en el ejemplo anterior es la media aritmética y es la que se emplea con mayor frecuencia en los estudios estadísticos.

Al conjunto de todos los objetos que poseen cierta característica común se le llama *población*. Si la característica en estudio es medible, la medición de cada objeto de la población se llama *variable estocástica*. Al conjunto de todos los valores aleatorios que corresponden a los miembros de una población se le llama *población estadística*.

Definición

La *media aritmética*, denotada por μ, de una población estadística es la suma de las variables estocásticas dividida entre el número de variables estocásticas.

Ejemplo 1

Encontrar la media aritmética de la población estadística: 34, 23, 42, 27, 41 y 13.

Solución

La suma de los números es $34 + 23 + 42 + 27 + 41 + 13 = 180$. Puesto que hay seis variables estocásticas en la población, $\mu = 180/6 = 30$.

Ejemplo 2

Encontrar la media aritmética de la población estadística: 101, 203, 491, 321 y 114.

Solución

La suma de los números es 1 230. Puesto que hay cinco variables estocásticas en la población, $\mu = 1\,230/5 = 246$.

Supóngase que cinco personas tienen ingresos anuales de

$20 000.00, $23 000.00, $19 000.00, $18 000.00 y $500 000.00,

respectivamente. La media aritmética de esta población es

$$\$116\,000.00.$$

Sin embargo, esta medida no parece ser muy representativa de los números que forman la población. Puesto que la media aritmética da igual peso a todas las variables estocásticas, uno o dos valores extremos (como \$500 000.00) pueden llevar a conclusiones erróneas acerca de la distribución. En este ejemplo, una medida de tendencia central diferente, llamada la *mediana*, proporciona un cuadro más preciso. La mitad de los números de una población estadística será mayor o igual que la mediana y la otra mitad será menor o igual que la mediana.

Definición

En una población estadística que contenga un número impar de variables estocásticas, la *mediana* es el número de enmedio de la lista cuando las variables estocásticas se disponen en orden ascendente (o descendente). En una población estadística que contenga un número par de variables estocásticas, la mediana es la media aritmética de los dos números de enmedio.

Ejemplo 3

La mediana de los ingresos de las cinco personas del ejemplo anterior sería el número de enmedio de la distribución cuando se ordenan las variables estocásticas: {\$18 000.00, \$19 000.00, \$20 000.00, \$23 000.00, \$500 000.00}. La mediana es \$20 000.00.

Encontrar la mediana de la población estadística: 53, 22, 47, 61, 65, 35 y 47.

Solución

Primero se enlistan en orden las variables estocásticas: 22, 35, 47, 47, 53, 61 y 65. El número de enmedio es 47, por lo que 47 es la mediana.

Ejemplo 4

Encontrar la mediana de la población estadística: 68, 51, 73, 62, 70 y 81.

Solución

Primero se enlistan en orden las variables estocásticas: 51, 62, 68, 70, 73 y 81. Puesto que hay seis números, se encuentra la media arit-

mética de las dos variables estocásticas de enmedio. La mediana es $(68 + 70) / 2 = 138/2 = 69$.

Si el gerente de un mercado decide empacar manzanas, quizá quiera ver cómo van las ventas de manzanas por unos días, para determinar cuántas compra un cliente común de una vez. Supóngase que las ventas de manzanas de un día fueron las siguientes: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 7 y 9. La media aritmética es $52/15 = 3\ 7/15$. Ciertamente, el gerente no puede hacer paquetes de $3\ 7/15$ de manzanas. La mediana es 3; no obstante, sólo una persona compró tres manzanas. El gerente bien podría decidir hacer paquetes de dos manzanas, ya que más personas compraron dos que cualquier otro número. Esta medida de tendencia central se llama la *moda*.

Definición

La *moda* de una población estadística es la variable estocástica que aparece con mayor frecuencia en la población.

En una población estadística puede haber más de una moda. Si los números de una población sólo ocurren una vez, se dice que la moda no existe.

Ejemplo 5

Encontrar la moda de la población estadística: 53, 22, 47, 61, 65, 35 y 47.

Solución

Se enlistan en orden las variables estocásticas: 22, 35, 47, 47, 53, 61 y 65. Puesto que 47 ocurre dos veces, y las demás variables sólo una, la moda es 47.

Ejemplo 6

Encontrar la moda de la población estadística: 3, 4, 4, 5, 6, 6 y 7.

Solución

Hay dos modas: 4 y 6.

Se han visto tres diferentes medidas de tendencia central. En ocasiones, un tipo de medición es más adecuado que otro. La media es la mejor elección cuando a todas las variables estocásticas se les da el mismo peso. La mediana es la mejor elección cuando hay uno o dos valores extremos. La moda es la mejor elección para algo que sólo puede medirse en ciertos incrementos, como las tallas de ropa.

Ejemplo 7

Determinar qué tipo de promedio es más apropiado para cada población estadística.

(a) Las variables estocásticas \$76 000.00, \$45 000.00, \$72 000.00, \$73 000.00 son los precios de las casas de un vecindario.
(b) 4, 5, 5 1/2, 6, 6, 6 1/2, 6 1/2, 6 1/2, 7, 7, 7 1/2 y 8, donde las variables estocásticas son el número de zapatos que vende un comerciante.

Solución

(a) La mediana es el promedio más adecuado, debido a que no es afectado por el único valor relativamente pequeño.
(b) La moda es el promedio más adecuado, debido a que los números de los zapatos sólo ocurren en valores enteros y medios.

Ejemplo 8

Determinar qué tipo de promedio es más apropiado para cada población estadística.

(a) 92, 93, 94, 95, 100, donde las variables estocásticas son las calificaciones de un grupo de alumnos en una prueba.
(b) Las variables estocásticas \$22 000.00, \$20 000.00, \$28 000.00, \$19 000.00 y \$4 500.00, son los ingresos anuales de cinco personas.

Solución

(a) La media aritmética es el promedio más adecuado, debido a que lo afecta cada calificación.
(b) La mediana es el promedio más adecuado, debido a que no es afectado por el único valor relativamente pequeño.

Con frecuencia, los promedios dan un cuadro incompleto del que se obtienen conclusiones erróneas. Por ejemplo, en 1984 se anunció que el precio promedio de una casa nueva excedía los \$100 000.00. Muchas personas dedujeron que nunca podrían adquirir una casa promedio. Sin embargo, en ese momento las tasas de interés eran altas. Los constructores construían casas grandes de mayor precio que atrajeran a compradores acaudalados para quienes las tasas de interés no eran una consideración importante. La mediana de los precios de las casas de reventa era de \$73 300.00 en el mismo periodo.

Otro ejemplo es el de 1955, cuando el salario promedio de las mujeres era 64 por ciento del salario de un hombre. La Ley de Igualdad Salarial de 1963 penó el que los patrones pagaran menos a las mujeres por un trabajo igual, pero en 1985 el salario promedio de

las mujeres era 69 por ciento del salario promedio de los hombres. Algunas personas llegaron a la conclusión de que la discriminación de la mujer no era mucho peor que la de 1955. Sin embargo, en un promedio no puede considerarse que la mujer tiende a concentrarse en las áreas de los empleados de mostrador y los servicios, en las que los salarios son bajos. Además, las mujeres en muchos de los puestos con sueldos mayores, tradicionalmente ocupados por hombres, son jóvenes que no tienen tanta experiencia como los hombres que han ocupado esos puestos durante muchos años.

Cuando se lean informes que citen cifras "promedio", uno debe preguntarse qué tipo de promedio se usó, la media, la mediana o la moda. Es necesario considerar también la presencia de factores no mencionados en el informe que pudieran haber afectado el promedio.

Ejercicios

Encontrar la media aritmética de las siguientes poblaciones estadísticas. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. {7, 15, 12, 19, 13, 8, 10}
2. {32, 19, 42, 30, 19, 40, 28}
3. {41, 32, 50, 40, 55, 43, 32, 18, 58}
4. {14, 5, 17, 12, 10, 5, 17, 8}
5. {23, 10, 8, 10, 2, 25}
6. {15, 2, 30, 11, 2, 30, 10, 16}
7. {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21}
8. {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
9. {2, 4, 8, 16, 32}
10. {11, 3, 22, 7, 1, 16, 3}

Encontrar la mediana de las siguientes poblaciones estadísticas. Ver los ejemplos 3 y 4.

11. {7, 15, 12, 19, 13, 8, 10}
12. {32, 19, 42, 30, 19, 40, 28}
13. {41, 32, 50, 40, 55, 43, 32, 18, 58}
14. {14, 5, 17, 12, 10, 5, 17, 8}
15. {23, 10, 8, 10, 2, 25}
16. {15, 2, 30, 11, 2, 30, 10, 16}
17. {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21}
18. {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
19. {2, 4, 8, 16, 32}
20. {11, 3, 22, 7, 1, 16, 3}

Encontrar la moda de las siguientes poblaciones estadísticas. Ver los ejemplos 5 y 6.

21. {7, 15, 12, 19, 13, 8, 10}
22. {32, 19, 42, 30, 19, 40, 28}
23. {41, 32, 50, 40, 55, 43, 32, 18, 58}
24. {14, 5, 17, 12, 10, 5, 17, 8}
25. {23, 10, 8, 10, 2, 25}
26. {15, 2, 30, 11, 2, 30, 10, 16}
27. {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21}
28. {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
29. {2, 4, 8, 16, 32}
30. {11, 3, 22, 7, 1, 16, 3}

Determinar cuál es el promedio más adecuado en cada caso. Ver los ejemplos 7 y 8.

31. {$3.00, $4.00, $3.50, $4.25 $20.00 , donde cada cantidad es el precio de medio kilogramo de chocolate.}
32. {103, 96, 104, 136, 106, 107, 108, 101 , donde cada número es un coeficiente intelectual.}
33. {2.3, 1.9, 2.1, 1.8, 1.8, 2.0}, donde cada número es el tiempo de ejecución en segundos de un programa de computadora escrito como tarea por un grupo de estudiantes.
34. {6 5/8, 6 7/8, 7 1/4, 7 1/2, 6 7/8}, donde cada número es una talla de sombrero.
35. {3, 7, 19, 22, 25, 45, 67, 72, 75}, donde cada número es la edad de los pacientes admitidos en un hospital.
36. {1, 2, 2, 3, 4, 4, 107}, donde cada número es la permanencia en un hospital en días.
37. {110, 120, 120, 130, 130, 135, 140, 160}, donde cada número es la presión sistólica de un paciente de hospital.
38. {1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4}, donde cada cifra es el número de estudiantes que comparten un departamento.
39. {2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4}, donde cada cifra es el número de puertas de los automóviles vendidos por cierto distribuidor.
40. {12 000, 15 000, 22 000, 24 000, 110 000}, donde cada número es el kilometraje de los automóviles vendidos por determinado distribuidor.

*41. Cuatro gimnastas han alcanzado una calificación promedio de 9.6 en el salto de caballo, ¿qué calificación debe obtener el quinto gimnasta para elevar el promedio del equipo a 9.7?

*42. ¿Qué sucede con la media, la mediana y la moda si cada variable estocástica de la población estadística.

(a) se incrementa en 4?
(b) se multiplica por 4?

*43. Después de promediar 27 calificaciones de una prueba, un profesor decidió verificar el promedio, pero inadvertidamente incluyó el promedio con las 27 calificaciones y lo calculó para 28 calificaciones. ¿Qué efecto tendría este error en el resultado?

10.5. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Una medida de tendencia central es útil para resumir los datos de una población estadística, pero no proporciona un cuadro completo. Considérense las dos poblaciones $\{39, 40, 41, 42, 43\}$ y $\{1, 21, 41, 61, 81\}$. En ambos casos la media es 41, pero los valores de la primera población se concentran más cerca de la media. Los valores de la segunda población están bastante dispersos a ambos lados de la media. Existen formas de medir esta dispersión.

Definición

El *rango* es la diferencia entre los números mayor y menor de una población estadística.

Ejemplo 1

Encontrar la media y el rango de las siguientes poblaciones estadísticas.

(a) $\{39, 40, 41, 42, 43\}$
(b) $\{1, 21, 41, 61, 81\}$

Solución

(a) $\mu = 41$, y el rango es $43 - 39 = 4$.
(b) $\mu = 41$, y el rango es $81 - 1 = 80$.

Ejemplo 2

Encontrar la media y el rango de las siguientes poblaciones estadísticas.

(a) $\{47, 48, 49, 50, 51, 52, 53\}$
(b) $\{1, 48, 49, 50, 51, 52, 99\}$

Solución

(a) $\mu = 50$, y el rango es $53 - 47 = 6$.
(b) $\mu = 50$, y el rango es $99 - 1 = 98$.

En el ejemplo 2, las dos distribuciones tienen la misma media, y la mayoría de los valores de ambas poblaciones se agrupan a su alrededor. Sin embargo, los dos valores extremos 1 y 99 de la segunda población producen un rango grande. Una media de 50 y un rango de 98 también podría describir la distribución $\{1, 2, 3, 50, 97, 98, 99\}$. En esta distribución, los valores tienden a agruparse cerca de los valores mayor y menor de la población.

Una medida de dispersión que tome en cuenta qué tanto se desvía cada valor de la media sería de mayor utilidad que el rango, el cual está afectado tan sólo por los valores mayor y menor de la distribución. La *varianza* es una de tales medidas de dispersión.

Definición

La *desviación* es la diferencia entre un valor individual de una población estadística y la media de dicha población. La *varianza* es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de todos los valores que constituyen una distribución.

Ejemplo 3

Encontrar la varianza de las siguientes poblaciones estadísticas.
(a) $\{39, 40, 41, 42, 43\}$
(b) $\{1, 21, 41, 61, 81\}$

Solución

(a) La media es 41. Las desviaciones son $\{39 - 41, 40 - 41, 41 - 41, 42 - 41, 43 - 41\}$ o $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Los cuadrados de las desviaciones son $\{4, 1, 0, 1, 4\}$. La varianza es $(4 + 1 + 0 + 1 + 4) / 5 = 10/5 = 2$.

(b) La media es 41. Las desviaciones son $\{1 - 41, 21 - 41, 41 - 41, 61 - 41, 81 - 41\}$ o $\{-40, -20, 0, 20, 40\}$. Los cuadrados de las desviaciones son $\{1\,600, 400, 0, 400, 1\,600\}$. La varianza es $(1\,600 + 400 + 0 + 400 + 1\,600) / 5 = 4\,000 / 5 = 800$.

Ejemplo 4

Encontrar la varianza de las siguientes distribuciones.

(a) $\{47, 48, 49, 50, 51, 52, 53\}$
(b) $\{1, 48, 49, 50, 51, 52, 99\}$
(c) $\{1, 2, 3, 50, 97, 98, 99\}$

Solución

(a) La media es 50. Las desviaciones son $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Los cuadrados de las desviaciones son $\{9, 4, 1, 0, 1, 4, 9\}$. La varianza es $(9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9)/7 = 28/7 = 4$.

(b) La media es 50. Las desviaciones son $\{-49, -2, -1, 0, 1, 2, 49\}$. Los cuadrados de las desviaciones son $\{2\,401, 4, 1, 0, 1, 4, 2\,401\}$. La varianza es $(2\,401 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 2\,401)/7 = 4\,812/7$, que es aproximadamente 687.

(c) La media es 50. Las desviaciones son $\{-49, -48, -47, 0, 47, 48, 49\}$. Los cuadrados de la desviaciones son $\{2\,401, 2\,304, 2\,209, 0, 2\,209, 2\,304, 2\,401\}$. La varianza es $(2\,401 + 2\,304 + 2\,209 + 0 + 2\,209 + 2\,304 + 2\,401)/7$, que es aproximadamente 1 975.

En los ejemplos 4(b) y 4(c), la media es 50 y el rango 98 para ambas poblaciones. La varianza indica que los valores de la segunda población están muy separados.

Una dificultad al usar la varianza como medida de dispersión es que al elevar al cuadrado las desviaciones también se elevan al cuadrado las unidades que se estén usando. Por ejemplo, si la población es un grupo de estudiantes universitarios y la distribución son sus alturas, las desviaciones se expresarán en metros, pero la varianza se expresará en metros cuadrados, lo cual hace difícil su comparación con la media (expresada en metros). La medida de dispersión de uso más generalizado, la *desviación típica* o *estándar*, evita este problema.

Definición

La *desviación típica* o *estándar* de una población estadística, denotada por σ, es la raíz cuadrada de la varianza.

Ejemplo 5

Encontrar la desviación típica de las siguientes poblaciones estadísticas.

(a) $\{39, 40, 41, 42, 43\}$
(b) $\{1, 21, 41, 61, 81\}$

Solución

(a) La varianza se calculó en el ejemplo 3. Puesto que la varianza es 2, la desviación típica es $\sqrt{2}$ o aproximadamente 1.41.

(b) La varianza se calculó en el ejemplo 3. Puesto que la varianza es 800, la desviación típica es $\sqrt{800}$ o aproximadamente 28.28.

Ejemplo 6

Encontrar la desviación típica de la población estadística 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31

Solución

La media es 112/7 = 16. La varianza es (225 + 100 + 25 + 0 + 25 + 100 + 225) /7 = 700/7 = 100. Por lo tanto, $\sigma = \sqrt{100} = 10$.

Un programa de computadora, para encontrar la desviación típica con la definición que se dio, requeriría leer dos veces los datos. En la primera lectura se almacenaría la suma de las variables estocásticas (*v. e.*) en un acumulador, para poder calcular la media. En la segunda, se restaría la media a cada variable estocástica, y la suma de los cuadrados de estas desviaciones se almacenaría en un acumulador para que fuera posible la aplicación de la definición.

En ocasiones, la desviación típica se calcula utilizando la fórmula $\sigma = \sqrt{\text{media de } (v.\ e.)^2 - (\text{media de las } v.\ e.)^2}$. Con esta fórmula, acumulador se usa para almacenar la suma de los cuadrados de las variables estocásticas, y otro se usa para almacenar la suma de las variables estocásticas. La fórmula puede aplicarse después de leer una vez los datos. Sin embargo, el error de redondeo se acentúa con esta fórmula.

Existe una interesante relación entre el rango y la desviación típica. La desviación típica siempre es menor o igual que la mitad del rango. Esta relación podría usarse como ayuda para detectar errores aritméticos cometidos al calcular σ. No podrán detectarse todos los errores, pero sí los más graves.

Ejercicios

Encontrar la media y el rango de las siguientes poblaciones estadísticas. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. {9, 10, 12, 13, 16}
2. {11, 24, 25, 30, 35}
3. {0, 1, 12, 23, 24}
4. {4, 23, 25, 35, 38}
5. {26, 41, 42, 44, 46, 59}
6. {32, 36, 40, 44, 48, 52}

7. {29, 30, 31, 55, 56, 57}
8. {45, 46, 51, 53, 57, 61, 72}
9. {25, 47, 50, 53, 56, 62, 92}
10. {11, 12, 13, 85, 87, 88, 89}

Encontrar la varianza de las siguientes poblaciones estadísticas. Ver los ejemplos 3 y 4.

11. {9, 10, 12, 13, 16}
12. {11, 24, 25, 30, 35}
13. {0, 1, 12, 23, 24}
14. {4, 23, 25, 35, 38}
15. {26, 41, 42, 44, 46, 59}
16. {32, 36, 40, 44, 48, 52}
17. {29. 30, 31, 55, 56, 57}
18. {45, 46, 51, 53, 57, 61, 72}
19. {25, 47, 50, 53, 56, 62, 92}
20. {11, 12, 13, 85, 87, 88, 89}

Encontrar la desviación típica de las siguientes poblaciones estadísticas. Ver los ejemplos 5 y 6.

21. {4, 6, 8, 10}
22. {7, 10, 16, 19}
23. {1, 2, 12, 13}
24. {10, 13, 14, 15}
25. {19, 21, 22, 23, 25}
26. {1, 4, 22, 40, 43}
27. {3, 5, 10, 12, 17, 19}
28. {1, 5, 8, 12, 15, 19}
29. {2, 3, 5, 7, 11, 14}
30. {1, 2, 5, 7, 9, 10, 11, 11}

➡ **31.** Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que muestre el algoritmo para encontrar la desviación típica utilizando la fórmula

$$\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$$

dada una población estadística.

➡ **32.** Usar el pseudocódigo o un diagrama de flujo que muestre el algoritmo para encontrar la desviación típica utilizando la fórmula

$$\sigma = \sqrt{\text{media de (v.e)}^2 - (\text{media de las v.e.})^2}$$

dada una población estadística.

*33. Resolver el ejemplo 6 aplicando la fórmula del problema 32.
*34. ¿Qué sucede con el rango y la desviación típica si

(a) todas las variables se incrementan en 4 unidades?
(b) todas las variables se multiplican por 4?

10.6. HISTOGRAMAS Y LA CURVA NORMAL

Los datos usados en estadística suelen clasificarse como discretos o continuos. Los datos son discretos si las mediciones sólo pueden hacerse en incrementos determinados. Por ejemplo, el número de televisores por hogar es una variable discreta, ya que si en un hogar aumenta el número de televisores, este incremento debe ser de 1, 2, etc., y no de 1/2 o 3/4. Por otra parte, la altura es una variable continua, ya que la altura no tiene que medirse en intervalos de 0.01 m, sino que puede asumir cualquier valor entre centímetros completos, como 1.613 m.

Con frecuencia resulta útil una interpretación gráfica de los datos de una población estadística. Un tipo de gráfica es la *distribución de frecuencias*. En el eje horizontal se indican los valores posibles de la variable, y en el eje vertical se indica el número de veces que ocurre uno de los valores de la población. En la figura 10.1 se presenta una distribución de frecuencias para el número de caras obtenidas cuando cinco monedas se lanzaron 64 veces.

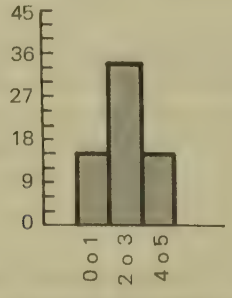


Figura 10.1

El eje horizontal se divide en intervalos llamados *intervalos de clase*. Para variables continuas, el centro de un intervalo puede elegirse arbitrariamente. Sin embargo, cada intervalo de clase debe tener la misma anchura. Por lo general, para variables discretas el centro de los intervalos de clase se hace coincidir con una de las variables. Por ejemplo, un intervalo con centro en 2 iría de 1.5 a 2.5. Se traza un rectángulo con el intervalo de clase como base. La altura del rectán-

gulo es el número en el eje vertical que indica cuántas variables estocásticas se incluyen en ese intervalo de clase. A este tipo de gráfica se le llama *histograma*.

El histograma de la figura 10.1 ilustra la frecuencia con la que ocurrieron diferentes números de caras cuando cinco monedas se lanzaron 64 veces. Todos los intervalos de clase tienen dos unidades de ancho. Si los mismos datos de un histograma se grafican con intervalos de clase de una unidad (ver la figura 10.2), el histograma empieza a aproximarse a una forma llamada la *curva normal*. Ver la figura 10.3.

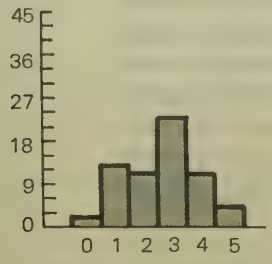


Figura 10.2

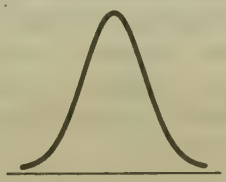


Figura 10.3

En ocasiones, la curva normal, llamada *curva de campana*, con frecuencia es conocida para los estudiantes, ya que las calificaciones de muchas pruebas normalizadas se distribuyen de acuerdo con esta curva. Alguna vez se pensó que cualquier grupo de datos tomados de la naturaleza, tales como la altura o el peso, tenían una distribución normal. Aun cuando se han encontrado múltiples excepciones, la curva normal aún tiene importantes aplicaciones en la teoría estadística.

La curva normal es como un histograma de variables continuas en el que cada punto del eje horizontal representa un intervalo de clase. El eje vertical de un histograma no tiene que indicar necesariamente una escala. La gráfica puede trazarse de tal modo que el área (en lugar de la altura) de cada rectángulo represente el número de variables estocásticas dentro de ese intervalo de clase. Cuando la graficación se hace de esta manera, el área total bajo el histograma es igual al 100 por ciento.

La curva normal presenta varias características importantes.

(1) Es simétrica respecto al centro. Es decir, el lado izquierdo es una imagen reflejada del derecho.
(2) El área bajo la curva representa el 100 por ciento de la población.
(3) La curva está totalmente determinada por la media y la desviación típica de la población.

Se dice que la curva está totalmente determinada por la media y la desviación típica de la población porque la curva tiene su centro en la media, y aproximadamente 68 por ciento del área bajo la curva está a una desviación típica a ambos lados de la media. Aproximadamente 95 por ciento del área bajo la curva está a dos desviaciones típicas a ambos lados de la media. Aproximadamente 99 por ciento del área bajo la curva está a tres desviaciones típicas de la media. La curva normal puede trazarse si se coloca el centro de la curva normal en la media y se localizan los puntos del eje horizontal que están a ± 1, ± 2 y ± 3 desviaciones típicas de la media.

Para usar la curva normal en el análisis estadístico, es necesario convertir las unidades del eje horizontal (llamados *valores aleatorios*) en unidades llamadas *variables z* o *normalizadas*. Una variable z es la medida del número de desviaciones típicas a las que se encuentra un valor de la media. Por tanto, a la media, μ, le corresponde una variable z igual a 0. Una variable z igual a 2 representa dos desviaciones típicas a la derecha de la media. Las variables z negativas indican mediciones a la izquierda de la media.

Para convertir un valor aleatorio x en una variable normalizada z se usa la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Ejemplo 1

Si una población con una distribución normal tiene una media de 50 y una desviación típica de 5, encontrar la variable z de las siguientes mediciones.

(a) $x = 53$.
(b) $x = 42$.

Solución

(a) $z = (53 - 50)/5 = 3/5 = 0.6$.
(b) $z = (42 - 50)/5 = -8/5 = -1.6$.

Ejemplo 2

Una compañía empaca cereal en cajas. Si el peso de las cajas tiene una distribución normal con una media de 12 onzas y una desviación típica de 0.3 onzas, ¿a cuántas desviaciones típicas se encuentra una caja que pesa 11.5 onzas de menos?

Solución

$z = (11.5 - 12)/0.3 = -0.5/0.3 = -5/3 \approx -1.67$ (el símbolo $\approx$ significa "es aproximadamente igual a").

En la tabla 10.1 se muestra qué porcentaje (expresado como decimal) del área bajo la curva normal está entre la media y $|z|$ para varios valores de $|z|$. Es posible usar esta tabla para contestar muchas preguntas acerca de una distribución normal específica.

Tabla 10.1

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0.0	0.000	0.004	0.008	0.012	0.016	0.020	0.024	0.028	0.032	0.036
0.1	0.040	0.044	0.048	0.052	0.056	0.060	0.064	0.068	0.071	0.075
0.2	0.079	0.083	0.087	0.091	0.095	0.099	0.103	0.106	0.110	0.114
0.3	0.118	0.122	0.126	0.129	0.133	0.137	0.141	0.144	0.148	0.152
0.4	0.155	0.159	0.163	0.166	0.170	0.174	0.177	0.181	0.184	0.188
0.5	0.192	0.195	0.199	0.202	0.205	0.209	0.212	0.216	0.219	0.222
0.6	0.226	0.229	0.232	0.236	0.239	0.242	0.245	0.249	0.252	0.255
0.7	0.258	0.261	0.264	0.267	0.270	0.273	0.276	0.279	0.282	0.285
0.8	0.288	0.291	0.294	0.297	0.300	0.302	0.305	0.308	0.311	0.313
0.9	0.316	0.319	0.321	0.324	0.326	0.329	0.332	0.334	0.337	0.339
1.0	0.341	0.344	0.346	0.349	0.351	0.353	0.355	0.358	0.360	0.362
1.1	0.364	0.367	0.369	0.371	0.373	0.375	0.377	0.379	0.381	0.383
1.2	0.385	0.387	0.389	0.391	0.393	0.394	0.396	0.398	0.400	0.402
1.3	0.403	0.405	0.407	0.408	0.410	0.412	0.413	0.415	0.416	0.418
1.4	0.419	0.421	0.422	0.424	0.425	0.427	0.428	0.429	0.431	0.432
1.5	0.433	0.435	0.436	0.437	0.438	0.439	0.441	0.442	0.443	0.444
1.6	0.445	0.446	0.447	0.448	0.450	0.451	0.452	0.453	0.454	0.455
1.7	0.455	0.456	0.457	0.458	0.459	0.460	0.461	0.462	0.463	0.463
1.8	0.464	0.465	0.466	0.466	0.467	0.468	0.469	0.469	0.470	0.471
1.9	0.471	0.472	0.473	0.473	0.474	0.474	0.475	0.476	0.476	0.477
2.0	0.477	0.478	0.478	0.479	0.479	0.480	0.480	0.481	0.481	0.482
2.1	0.482	0.483	0.483	0.483	0.484	0.484	0.485	0.485	0.485	0.486
2.2	0.486	0.486	0.487	0.487	0.488	0.488	0.488	0.488	0.489	0.489
2.3	0.489	0.490	0.490	0.490	0.490	0.491	0.491	0.491	0.491	0.492
2.4	0.492	0.492	0.492	0.493	0.493	0.493	0.493	0.493	0.493	0.494
2.5	0.494	0.494	0.494	0.494	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495
2.6	0.495	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496
2.7	0.497	0.497	0.497	0.497	0.497	0.497	0.497	0.497	0.497	0.497
2.8	0.497	0.498	0.498	0.498	0.498	0.498	0.498	0.498	0.498	0.498
2.9	0.498	0.498	0.498	0.498	0.498	0.498	0.499	0.499	0.499	0.499
3.0	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499
3.1	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499
3.2	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.500	0.500	0.500

Podría preguntarse, ¿qué porcentaje de las cajas de cereal (del ejemplo 2) pesa más de 12.7 oz? Se convierte 12.7 oz a una variable z: $z = (12.7 - 12)/0.3 = 0.7/0.3 = 7/3 \approx 2.33$. Se pregunta qué porcentaje del área está a la derecha de esta variable z. Ver la figura 10.4.

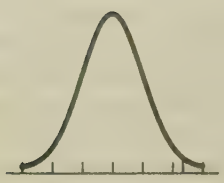


Figura 10.4

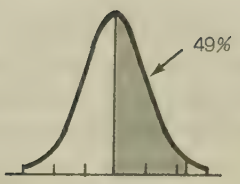


Figura 10.5

La tabla 10.1 indica que 0.49 o 49 por ciento del área bajo la curva está entre 0 y $z = 2.33$ (es decir, entre 12 y 12.7). Ver la figura 10.5. Puesto que 50 por ciento de esta área está a la derecha de la media, el área que se quiere es $0.50 - 0.49 = 0.01$. Por lo tanto, 1 por ciento de las cajas pesa más de 12.7 oz.

Para encontrar el porcentaje de las variables estocásticas de una población que satisfacen una condición dada:

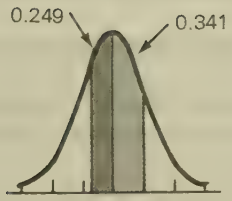
1. Se convierten las variables aleatorias en variables normalizadas.
2. Se traza la curva normal y se sombrea el área que satisface la condición. La media está en el centro de la curva normal.
3. Se usa la tabla 10.1 para determinar el área bajo la curva entre la media y el límite del área sombreada, y se traza la curva normal con esta área sombreada.
4. Se comparan los dos trazos de los pasos 2 y 3. Recuérdese que el área de la media a la extrema derecha (o izquierda) de la curva normal es 50 por ciento del área bajo la curva.
5. Se suma o se resta, según sea el caso, para determinar el área sombreada del paso 2.

Ejemplo 3

¿Qué porcentaje de las cajas de cereal (ver el ejemplo 2) pesa entre 11.8 y 12.3 oz?

Solución

Se quiere el área entre 11.8 y 12.3. La variable z asociada con 11.8 es $(11.8 - 12)/0.3 = -0.2/0.3 \approx -0.67$. La variable z asociada con 12.3 es $(12.3 - 12)/0.3 = 0.3/0.3 \approx 1.00$. En los diagramas que se muestran a continuación se ilustra el área entre la media y $|z| = 0.67$ como 0.249 o 24.9 por ciento. El área entre la media y $|z| = 1.00$ es .341 o 34.1 por ciento.



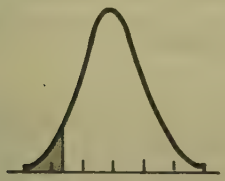
Se llega a la conclusión de que el área entre − 0.67 y 1.00 es 24.9 por ciento + 34.1 por ciento o 59.0 por ciento. Es decir, 59 por ciento de las cajas entre 11.8 y 12.3 oz.

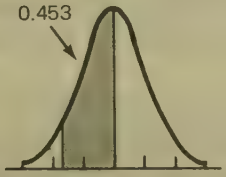
Ejemplo 4

¿Qué porcentaje de las cajas de cereal pesa menos de 11.5 oz?

Solución

La variable z asociada con 11.5 es $(11.5 - 12)/0.3 = -5/3 \approx -1.67$. La tabla 10.1 da el área entre la media y $|z| = 1.67$ como 0.453 o 45.3 por ciento. Los diagramas siguientes ilustran el área que se quiere encontrar y el área dada en la tabla 10.1.





El porcentaje de las cajas que pesan menos de 11.5 oz es 50 por ciento − 45.3 por ciento = 4.7 por ciento.

Ejercicios

Si una población con una distribución normal tiene una media de 45 y una desviación típica de 4, encontrar la variable z de todas las mediciones (con aproximación de centésimas). Ver el ejemplo 1.

1. $x = 51$ **2.** $x = 39$ **3.** $x = 55$ **4.** $x = 35$ **5.** $x = 34$.

Si una población con una distribución normal tiene una media de 32 y una desviación típica de 7, encontrar la variable z de todas las mediciones (con aproximación de centésimas). Ver el ejemplo 1.

6. $x = 42$ **7.** $x = 22$ **8.** $x = 15$ **9.** $x = 49$ **10.** $x = 52$.

Contestar las preguntas siguientes. Ver los ejemplo 3 y 4.

Una compañía empaca papel comercial de tal modo que las longitudes de los rollos tienen una distribución normal con una longitud promedio (media) de 100m y una desviación típica de 3m.

11. ¿Qué porcentaje de los rollos tiene más de 105 m de longitud?
12. ¿Qué porcentaje de los rollos tiene menos de 98 m de longitud?
13. ¿Qué porcentaje de los rollos tiene una longitud entre 96 y 104 m?

En una panadería se hacen galletas de chocolate cuyos diámetros tienen una distribución normal con un diámetro promedio de 12" y una desviación típica de 0.5".

14. ¿Qué porcentaje de las galletas tiene un diámetro mayor de 13"?
15. ¿Qué porcentaje de las galletas tiene un diámetro menor de 11.25"?
16. ¿Qué porcentaje de las galletas tiene diámetros entre 11.75 y 12.25"?

El tiempo en que comen grupos de cuatro personas en cierto restaurante tiene una distribución normal con una media de 1 hora 15 minutos y una desviación típica de 7 minutos.

17. ¿Qué porcentaje de los grupos tardan más de 1 hora 25 minutos?
18. ¿Qué porcentaje de los grupos tardan menos de 1 hora?
19. ¿Qué porcentaje de los grupos tardan entre 1 hora 12 minutos y 1 hora 18 minutos?

La velocidad de mecanografiado de las secretarias de una oficina tiene una distribución normal con una media de 80 palabras por minuto y una desviación típica de 10.

20. ¿Qué porcentaje de ellas mecanografían entre 75 y 90 palabras por minuto?
21. ¿Qué porcentaje de ellas mecanografían entre 72 y 82 palabras por minuto?
22. ¿Qué porcentaje de ellas mecanografían entre 68 y 88 palabras por minuto?

Un fabricante de caramelos encuentra que el peso de las cajas de chocolates tiene una distribución normal con un peso promedio de 16 oz y una desviación típica de 2 oz.

23. ¿Qué porcentaje de las cajas pesa entre 11 y 19 oz?
24. ¿Qué porcentaje de las cajas pesa entre 15 y 18 oz?
25. ¿Qué porcentaje de las cajas pesa entre 13 y 17 oz?

Las calificaciones de un examen tienen una distribución normal con una media de 100 y una desviación típica de 10.

26. ¿Qué porcentaje de las calificaciones está entre 90 y 105?
27. ¿Qué porcentaje de las calificaciones está entre 98 y 107?
28. ¿Qué porcentaje de las calificaciones está entre 83 y 113?

10.7. ESTIMACIÓN DE LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN

Hasta este punto, cada vez que se ha calculado la media, la mediana, la moda o la desviación típica, se ha empezado con una lista de números que representan una población, y los cálculos se han basado en cada uno de los números de las listas. Incluso para calcular la mediana o el rango utilizando a lo sumo dos números del conjunto, fue necesario considerar la lista completa para determinar cuáles de los números se usarían.

No siempre es conveniente (o incluso posible) estudiar una población completa. Cuando una compañía que elabora pan desea saber el tiempo de vida promedio de las hogazas, posiblemente no podrá dejar que todas las hogazas se endurezcan para ver cuánto tiempo se lleva. Más bien, se escogen algunas hogazas de la población y si esas hogazas son representativas de la población completa, es posible estimar la media. La selección de una muestra realmente representativa es un proceso complicado, pero aquí se considerarán únicamente los aspectos del cálculo del problema.

Definición

A una parte de una población se le llama *muestra*, y la media de la muestra (llamada media muestral) se denota por $\overline{x}$.

Considérese como ejemplo una población cuyas variables estocásticas son $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. La media de la población, μ, es $(1 + 3 + 5 + 7 + 9)/5 = 25/5 = 5$. Si se escogiera una muestra de tres elementos, habría diez posibilidades: $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 3, 9\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 5, 9\}$, $\{1, 7, 9\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{3, 5, 9\}$, $\{3, 7, 9\}$ y $\{5, 7, 9\}$. Las medias muestrales son, respectivamente, 3, 11/3, 13/3, 13/3, 5, 17/3, 5, 17/3, 19/3 y 7. A partir de estos datos puede verse que si las medias muestrales en sí se consideran una población, la media de la población es $1/10(3 + 11/3 + 13/3 + 13/3 + 5 + 17/3 + 5 + 17/3 + 19/3 + 7) = 1/10(50) = 5$.

No es coincidencia que la media de las medias muestrales sea igual a la media de la población. La teoría del muestreo estadístico se basa en un importante principio, conocido como el *teorema del límite central*.

El teorema del límite central

Para cualquier población, si se consideran todas las muestras de tamaño n, la media de las medias muestrales será igual a la media de la población.

Para muestras de tamaño n (donde $n \geqslant 30$), la población de las medias muestrales (formada al tomar la media de cada muestra posible de tamaño n) tendrá una distribución aproximadamente normal con una desviación típica (denotada por s) de $\sigma/\sqrt{n}$ (donde σ es la desviación típica de la población original). La cantidad $\sigma / \sqrt{n}$ se denomina el *error estándar*.

En la teoría del muestreo es importante que estas medias muestrales tengan una distribución aproximadamente normal, aun cuando la población original no la tenga. Las propiedades de la curva normal pueden usarse para estudiar la población de las medias muestrales de muestras que contienen 30 variables estocásticas o más. En el resto del capítulo, se supondrá que las muestras son de este tamaño.

Por ejemplo, se sabe que aproximadamente 68 por ciento de las medias muestrales están a una desviación típica a ambos lados de la media de las medias muestrales. Pero como la media de las medias muestrales es igual a la media de la población, puede decirse que casi 68 por ciento de las medias muestrales estarán a una desviación típica a ambos lados de la media de la población. Por lo tanto, si se toma una muestra y se calcula su media, la probabilidad de que esté a ± 1 desviaciónes típicas $= \sigma/\sqrt{n}$ de la media de la población es de 0.68, aproximadamente.

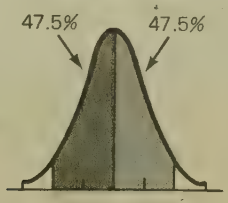
El intervalo en el que se espera que esté la media de la población con base en la media muestral se llama *intervalo de confianza*. Con un intervalo de confianza de 0.95, la probabilidad de que μ esté en el intervalo dado es de 0.95. Con un intervalo de confianza de 0.99, la probabilidad de que μ esté en el intervalo dado es de 0.99. Las estimaciones de intervalos de confianza de 0.95 y 0.99 son de uso común.

Ejemplo 1

En un examen de colocación, una muestra de 36 alumnos de una universidad obtuvo una calificación media de $\bar{x} = 100$ con una desviación típica de $s = 12$. Establecer una estimación con un intervalo de confianza de 0.95 de la calificación promedio de todos los estudiantes de la universidad.

Solución

Debe determinarse un intervalo dentro del cual esté 95 por ciento de todas las medias muestrales. No se conoce μ ni σ, (por ejemplo, ni la media ni la desviación típica de la población de estudiantes de la universidad). Si $\mu = \overline{x}$, entonces, para la población de las medias muestrales, podría decirse que como la mitad de 95 por ciento es 47.5 por ciento, una variable z de 1.96 corresponde a 0.475. Por tanto, 95 por ciento del área bajo la curva normal está entre μ y $\pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ (recuérdese que $\sigma/\sqrt{n}$ es la desviación típica de la población de las medias muestrales). Ver la figura siguiente.



Si $\mu \neq \overline{x}$, entonces aún puede afirmarse que el 95 por ciento de las veces μ caerá dentro de $\pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ de $\overline{x}$. Es decir, si 95 por ciento de las $\overline{x}$ están dentro de $\pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ de μ, entonces μ está dentro de $\pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ de $\overline{x}$ para 95 por ciento de las $\overline{x}$. Por tanto, hay una probabilidad de 0.95 de que μ esté dentro de $\pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ de la media de esta muestra. Utilizando $s = 12$ como estimación de σ, se tiene $\sigma/\sqrt{n} = 12/6 = 2$, que puede usarse como error estándar. La estimación de μ en el intervalo de confianza de 0.95 es, entonces, $100 \pm 1.96(2) = 100 \pm 3.92 = 96.08$ a 103.92.

El procedimiento utilizado en la solución de este problema se resume en la tabla siguiente.

Para determinar una estimación de la media de la población μ con un intervalo de confianza p, con base en la media muestral $\overline{x}$:

1. Se encuentra la variable z que corresponde a $(1/2)p$ por ciento del área bajo la curva normal.
2. Se estima el error estándar (por ejemplo, la desviación típica de la población de las medias muestrales) como $s/\sqrt{n}$, donde s es la desviación típica de la muestra.*
3. La estimación de μ en el intervalo de confianza dado es $\overline{x} \pm z\,(s/\sqrt{n})$.

* Cuando se calcula la desviación estándar de una muestra, la suma de las deviaciones cuadráticas se divide entre n-1 (más bien que n) antes de que se obtenga la raíz cuadrada.

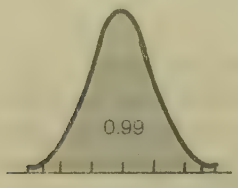
Cuando se calcula la desviación típica de una muestra, la suma de los cuadrados de las desviaciones se divide entre $n - 1$ (en lugar de entre n) antes de obtener la raíz cuadrada.

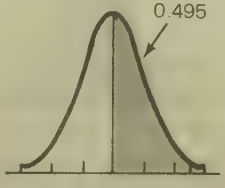
Ejemplo 2

Establecer una estimación con un intervalo de confianza de 0.99 del salario promedio anual de los empleados del área de ventas de una empresa grande, si una muestra de 100 empleados indica un salario anual de \$15 000.00 con una desviación típica de \$500.00

Solución

Se calcula la variable z correspondiente a 99 por ciento del área bajo la curva normal, como se muestra en las figuras siguientes.





Se tiene el valor $z = 2.58$ como el que corresponde a un área de 1/2 de 99 por ciento = $0.5 \times 0.99 = 0.495$. El error estándar puede estimarse como $500/\sqrt{100} = 500/10 = 50$. Por tanto, 99 por ciento de las medias muestrales caen dentro de $15\,000 \pm 2.58(50) = 15\,000 \pm 129$. La estimación de μ en el intervalo de confianza es \$14 871.00 a \$15 129.00.

Cuando se citan estadísticas en artículos periodísticos o de revistas, no siempre se menciona el nivel de confianza. Sin embargo, en ocasiones se proporciona suficiente información para calcularlo.

Ejemplo 3

Un hospital afirma que con base en una muestra de 49 bebés, el peso medio de los nacidos ahí está entre 7 lbs 5 onzas y 7 lbs 9 onzas, con una desviación típica de 7 onzas. Determinar el nivel de confianza de esta afirmación.

Solución

El valor de $\overline{x}$ está en el centro del intervalo, de donde $\overline{x}$ = 7 lbs 7 oz y μ = 7 lbs 7 oz ± 2 oz. A partir de la fórmula para una estimación con intervalo de confianza $\mu = \overline{x} \pm z(s/\sqrt{n})$, se sabe que $z(s/\sqrt{n}) = 2$ oz o $z(7/\sqrt{49}) = 2$ o $z = 2$. Puesto que una variable z de 2 corresponde a un área de 0.477 o 47.7 por ciento del área entre la

media μ y a + 2 desviaciones típicas, el 95.4 por ciento del área está a ± 2 desviaciones típicas, y el nivel de confianza debe ser 0.954.

Para determinar el nivel de confianza, dados la estimación con intervalo de confianza de $\mu = \overline{x} \pm y$, la desviación típica de la muestra s y el tamaño de la muestra n:

1. Se determina $\overline{x}$ encontrando el valor que está en el centro del intervalo de confianza dado.
2. Se obtiene la variable z al resolver la ecuación $y = z(s/\sqrt{n})$ para z.
3. Utilizando la tabla 10.1, se determina el área porcentual bajo la curva normal asociada con la variable z obtenida en el paso 2.
4. Se duplica el área y se cambia a la forma decimal para obtener el nivel de confianza.

Ejemplo 4

Un hospital afirma que con base en una muestra de 81 bebés, el peso medio de los nacidos allí está entre 7 lbs 5 oz y 7 lbs 9 oz, con una desviación típica de 7 oz. Determinar el nivel de confianza de esta afirmación.

Solución

El valor de $\overline{x}$ está en el centro del intervalo, de donde $\overline{x}$ = 7 lbs 7 oz y μ = 7 lbs 7 oz ± 2 oz. A partir de la fórmula para una estimación con intervalo de confianza $\mu = \overline{x} \pm z(s/\sqrt{n})$, se sabe que $z(s/\sqrt{n})$ = 2 oz o $z(7/\sqrt{81})$ = 2 o z = 2.57. Puesto que una variable z de 2.57 corresponde a un área de 0.495 o 49.5 por ciento del área entre la media μ y + 2 desviaciones típicas, 99 por ciento del área está a ± 2 desviaciones típicas, y el nivel de confianza debe ser 0.99.

Ejercicios

Para la muestras siguientes, establecer una estimación de μ con un intervalo de confianza de 0.95 y de 0.99. Ver los ejemplos 1 y 2.

1. Un grupo de 100 jóvenes de 15 años promedia 10 minutos 8 segundos para correr una milla y la desviación típica de la muestra es de 16 segundos.
2. Un grupo de 64 jóvenes de 15 años promedia 10 minutos 8 segundos para correr una milla y la desviación típica de la muestra es de 16 segundos.

3. Un grupo de 81 jóvenes de 17 años promedia 10 minutos 37 segundos para correr una milla y la desviación típica de la muestra es de 27 segundos.
4. Un grupo de 49 graduados universitarios, de 23 años de edad, tienen ingresos promedio esperados de por vida de $1 200 000.00, con una desviación típica de $70 000.00.
5. Un grupo de 49 graduados de bachillerato, de 23 años de edad, tienen ingresos promedio esperados de por vida de $860 000.00, con una desviación típica de $61 600.00.
6. Un grupo de 49 alumnas de bachillerato, de 23 años de edad, que abandonan sus estudios, tienen ingresos promedio esperados de por vida de $360 000.00, con una desviación típica de $77 000.00.
7. Un grupo de 100 recién graduados ganaron un promedio de $23 700.00, con una desviación típica de $4 000.00.
8. Un grupo de 100 egresados recién recibidos en ciencias de la computación ganaron un promedio de $26 000.00, con una desviación típica de $4 000.00.
9. Un grupo de 100 egresados recién recibidos en educación ganaron un promedio de $14 500.00, con una desviación típica de $1 200.00.

Determinar el nivel de confianza de los promedios dados. Ver los ejemplos 3 y 4.

10. Un agente de una empresa de bienes raíces afirma que con base en una muestra de 36 casas vendidas en la ciudad, el precio promedio se encuentra entre $84 040.00 y $87 960.00, con una desviación típica de $6 000.00.
11. Un vendedor de bienes raíces de una ciudad diferente afirma que con base en una muestra de 36 casas vendidas, el precio promedio se encuentra entre los $84 040.00 y los $89 420.00, con una desviación típica de $8 000.00.
12. Un grupo de 36 secretarias pudo mecanografiar entre 54 y 66 palabras por minuto, con una desviación típica de 14 palabras por minuto.
13. Un grupo de 49 secretarias pudo mecanografiar entre 54 y 64 palabras por minuto con una desviación típica de 14 palabras por minuto.
14. Un grupo de 100 personas ven televisión entre 1.87 y 2.1 horas diarias en promedio con una desviación típica de 0.5 horas.
15. Un grupo de 81 personas ven televisión entre 1.9 y 2.1 horas diarias en promedio con una desviación típica de 20 minutos (1/3 de hora).
*16. *La característica bajo estudio en una población puede no ser medible. Por ejemplo, si están casados o no los alumnos de una clase. Cada uno de ellos puede ser soltero, casado, divorciado o viudo. Para resumir los datos, se usa la *proporción* o porcentaje de la población de cada grupo. La letra π representa una proporción de la población y p representa una proporción muestral. Si de la población se seleccionan todas las muestras posibles de tamaño n (donde n es menor del

*Este problema se basa en la información del artículo "Can You Believe the Ratings?", de David Chagall, publicado en *T. V. Guide*, 24 de junio de 1978, 2-13.

10 por ciento de la población, pero usualmente grande), entonces la población de las proporciones muestrales se aproxima a una distribución normal. El promedio de esta población es π y la desviación típica es $\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$ (donde π se escribe como decimal). Por tanto, es posible hacer la estimación de π con intervalo de confianza, con base en p, de manera similar a la estimación de μ con un intervalo de confianza.

(a) Si los sondeos de opinión Nielsen informan que 20 por ciento de los hogares estadounidenses (con base en una muestra de 993 hogares) sintonizaban cierto programa de televisión, encontrar la estimación de π con un intervalo de confianza de 0.95.
(b) Si los sondeos de opinión Nielsen informan que 20%± 1.3%de los hogares estadounidenses (con base en una muestra de 993 hogares) sintonizaban cierto programa de televisión, ¿cuál es el nivel de confianza?

Revisión de capítulo

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se llama _____ _____.

Cuando cada punto muestral tiene las mismas posibilidades de ocurrir que cualquier otro, se dice que los puntos muestrales son _____.

La probabilidad menor que puede ocurrir es _____, y la mayor es _____.

$n!$ se lee n _____.

${}_nP_r$ se lee, "el número de _____ de _____ objetos tomados _____ a la vez".

${}_nC_r$ se lee, "el número de _____ de _____ objetos tomados _____ a la vez".

Dos eventos son _____ si el resultado del primero no influye en el resultado del segundo.

Si la característica en estudio es medible, la medición de cada objeto de la población se llama _____ _____.

La media, la mediana y la moda son medidas de _____.

El rango, la varianza y la desviación típica son medidas de _____.

A una parte de una población se le llama _____.

Prueba de capítulo

Especificar el espacio muestral de los experimentos siguientes.

1. Con los ojos vendados, sacar una canica de una caja que contiene cinco canicas rojas y cuatro verdes.

2. El lanzamiento de un dado tetraédrico (un cuerpo con cuatro lados triangulares).

Encontrar la probabilidad de que ocurran los eventos siguientes:

3. Con los ojos vendados, sacar una canica roja de una caja que contiene cinco canicas rojas y cuatro verdes.
4. Con los ojos vendados, sacar una canica azul de una caja que contiene cinco canicas rojas y cuatro verdes.
5. Obtener un número mayor que 2 o menor que 5 en una tirada de un dado regular (de seis lados).

Determinar el número total de formas en que puede ocurrir cada uno de los eventos siguientes.

6. Escribir una clave en la forma letra-dígito-letra-dígito si no se permite repetir las letras, pero sí los números.
7. Formar un número con los dígitos $\{1, 2, 3\}$ sin repeticiones.
8. Formar una clave de dos letras con las letras $\{A, F, G, K\}$ sin repeticiones.
9. Elegir a dos de cinco personas para asistir a una conferencia.
10. Colocar dos de siete interruptores en la posición "apagado".
11. Obtener dos números primos en una tirada de un dado regular.
12. Obtener tres 6 seguidos al tirar tres veces un dado regular.
13. Sacar dos cartas con figuras (K, Q, J) de un mazo barajado de 52 naipes, si la primera carta se reintegra.
14. Sacar dos figuras (K, Q, J) de un mazo barajado de 52 naipes, si la primera carta no se reintegra.
15. Sacar dos cartas del mismo palo de un mazo barajado de 52 naipes, si la primera no se reintegra.
16. Encontrar la media aritmética de: $\{4, 9, 11, 4, 7\}$.
17. Encontrar la mediana de: $\{4, 9, 11, 4, 7\}$.
18. Encontrar la moda de: $\{4, 9, 11, 4, 7\}$.

Determinar cuál es el promedio más adecuado en cada caso.

19. $\{\$25, \$28, \$30, \$32, \$75\}$, donde cada cantidad es el precio de una comida para dos personas en un restaurante local.
20. $\{4, 3, 2, 4, 2\}$, donde cada valor es el número de horas dedicadas por estudiantes a una tarea escolar.
21. Encontrar la media y el rango de: $\{27, 40, 43, 43, 47, 58\}$.

Encontrar la varianza de:

22. $\{5, 22, 26, 34, 38\}$.
23. $\{26, 41, 42, 44, 45, 60\}$.

Encontar la desviación típica de:

24. $\{2, 5, 23, 41, 44\}$.
25. $\{0, 1, 3, 6, 9, 9, 10, 10\}$.

Si una población tiene una distribución normal con una media de 38 y una desviación típica de 6, encontrar la variable z de los valores aleatorios x dados enseguida:

26. $x = 29$.
27. $x = 52$.

Supóngase que se empacan papas fritas de tal modo que los pesos de las bolsas tienen una distribución normal con un peso promedio de 12 oz y una desviación típica de 0.5 oz.

28. ¿Qué porcentaje de las bolsas pesan más de 13.5 oz?
29. ¿Qué porcentaje de las bolsas pesan menos de 11.0 oz?
30. ¿Qué porcentaje de las bolsas pesan entre 11.75 y 12. 75 oz?

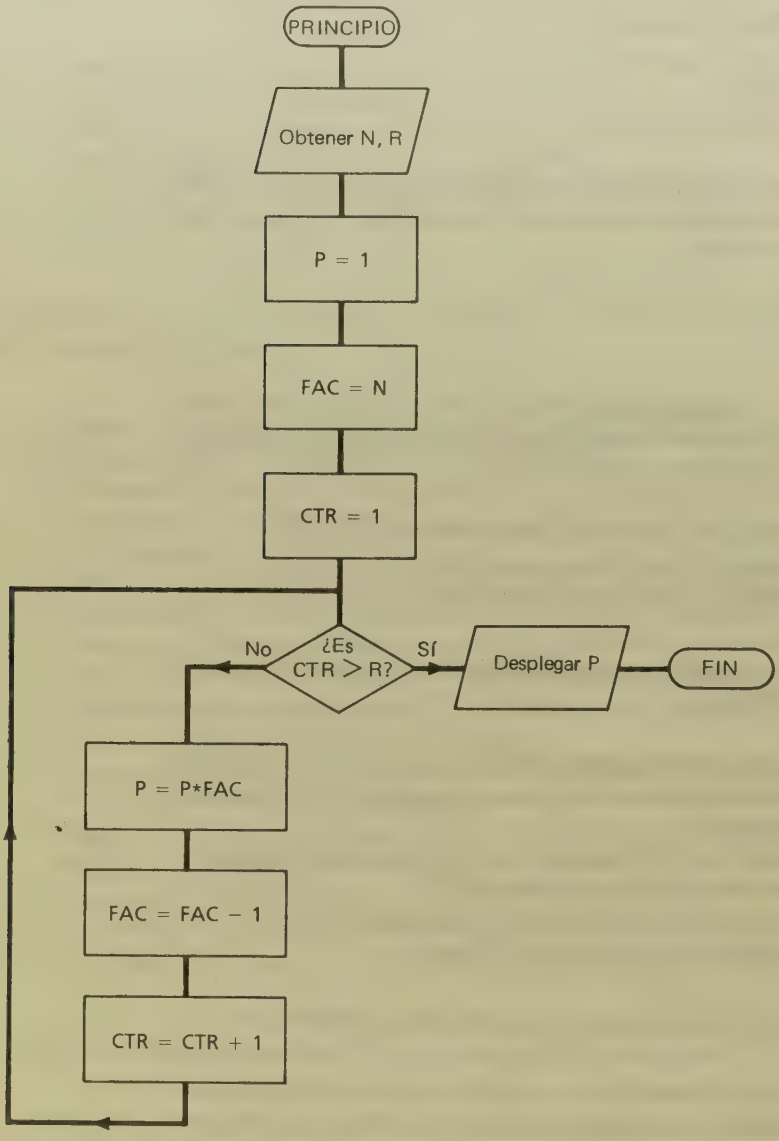
Para cada muestra, establecer una estimación de μ con un intervalo de confianza de 0.95.

31. En una prueba de coeficiente intelectual, una muestra de 49 estudiantes universitarios tiene una media de 110 y una desviación típica de 7.
32. La altura media de 36 jugadores de un torneo de baloncesto es de 78" con una desviación típica de 3".
33. El peso medio de 64 empleados de una compañía es de 165 lbs con una desviación típica de 16 libras.

Determinar el nivel de confianza de los siguientes promedios.

34. Un grupo de 81 automóviles de un lote de autos usados tienen una antigüedad promedio entre 6.57 y 7.63 años con una desviación típica de dos años.
35. Un grupo de 64 pacientes externos de una clínica tuvo una temperatura media entre 98.0° F y 99.2° F, con una desviación típica de 2 grados.

⇒36. El siguiente diagrama de flujo muestra un algoritmo para calcular ${}_nP_r$. Modificarlo para encontrar ${}_pC_r$.



BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

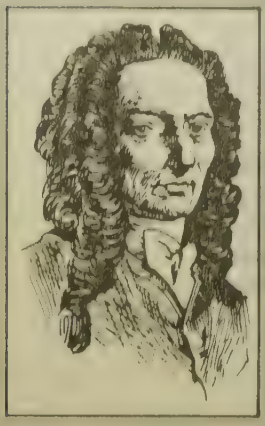
Book, Stephen A. "Why $n - 1$ in the Formula for the Sample Standard Deviation?," *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 10 No. 5 (Noviembre 1979), 330-333.

Falk, Ruma. "Another Look at the Mean, Median, and Standard Deviation," *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 12 No. 3 (Junio 1981), 207-208. (Se muestra la relación que existe entre la media y la mediana de una población, con la desviación estándar.)

Roberts, Jerry A. "Accurate Computation of Variance," *The College Mathematics Journal*, Vol. 16 No. 2 (Marzo 1985), 149-150. (Se comparan las implantaciones en computadora de dos fórmulas para la varianza.)

Thomas, David A. "Understanding the Central Limit Theorem," *The Mathematics Teacher*, Vol. 77 No. 7 (Octubre 1984), 542-543. (Programa en BASIC para ilustrar el teorema del límite central.)

Biografía — Abraham DeMoivre



Abraham DeMoivre nació el 26 de mayo de 1667 en Francia, donde su padre era cirujano. Sus padres eran hugonotes, y cuando tenía 18 años de edad, la familia emigró a Londres en busca de tolerancia para sus creencias religiosas. DeMoivre se ganaba la vida impartiendo clases privadas y resolviendo paradojas matemáticas. Compró una copia del libro de cálculo de Newton y lo deshojó para poder llevar una o dos en sus bolsillos para estudiarlas entre una cita y otra. Esperaba lograr un lugar en una universidad, pero aun cuando disfrutó de la ayuda de amigos influyentes, se le negó su ingreso debido a que no era inglés de nacimiento.

En 1711 publicó un artículo titulado ***Las leyes del azar***. En 1716 amplió esta obra y la tituló ***La doctrina del azar. "Métodos para calcular la probabilidad de eventos en el juego"***. Fue uno de los primeros libros que trataba exclusivamente de probabilidad. Estadísticas de mortalidad, permutaciones y combinaciones se encontraban entre los temas tratados.

En 1733 escribió un panfleto de siete páginas que mostró a sus amigos. Aún existen dos copias. Esta publicación es importante debido a que desarrolla el concepto de curva normal. La curva está dada por la ecuación $y = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{(-x^2/2)}$.

Soltero toda su vida, dedicaba gran parte del tiempo a resolver problemas matemáticos en los cafés de Londres. Se dice que Newton enviaba por él a uno de los cafés todas las tardes para discutir temas de filosofía.

Cuando envejeció, tuvo problemas audiovisuales. Murió el 27 de noviembre de 1754, a los 87 años de edad. Cuenta una leyenda que empezó a dormir, cada noche, 10 a 15 minutos más que la noche anterior. Cuando llegó al punto en que debía dormir 24 horas, no volvió a levantarse.

Apéndice. Números con signo

El estudio de la aritmética utilizando números con signo se inicia con una definición.

Definición

El valor absoluto de un número real x es x si $x \geqslant 0$ y el valor absoluto de un número x es $-x$ si $x < 0$. El valor absoluto de x se denota por $|x|$.

Por tanto, si $x = 3$, se tiene $|x| = x$, ya que $x \geqslant 0$. Es decir, $|3| = 3$. Pero si $x = -3$, se tiene $|x| = -x$ ya que $x < 0$. Es decir, $|-3| = -(-3) = 3$. Este ejemplo indica que el valor absoluto de un número real es positivo. Éste es la magnitud del número sin atender al signo. A continuación, se enuncian las reglas para efectuar operaciones aritméticas utilizando números con signo.

Para sumar dos números con signo:

(a) Si el signo de los dos números es igual, se suman los valores absolutos de los mismos. La suma tiene el mismo signo que los números.
(b) Si los signos de los dos números son diferentes, se resta el menor de los números en valor absoluto del mayor. La diferencia tiene el signo del número con el valor absoluto mayor.

Ejemplo 1

Efectuar las sumas siguientes:

(a) $3 + 5$
(b) $-3 + 5$
(c) $3 + (-5)$
(d) $-3 + (-5)$

Solución

(a) $3 + 5 = 8$
(b) $-3 + 5 = 2$
(c) $3 + (-5) = -2$
(d) $-3 + (-5) = -8$

Para restar dos números con signo:

Se cambia el signo del sustraendo (el número que se está restando) y se suma al minuendo, aplicando la regla de la suma para números con signo.

Ejemplo 2

Efectuar las siguientes sustracciones:

(a) $3 - 5$
(b) $-3 - 5$
(c) $3 - (-5)$
(d) $-3 - (-5)$

Solución

(a) $3 - 5 = 3 + (-5) = -2$
(b) $-3 - 5 = -3 + (-5) = -8$
(c) $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$
(d) $-3 - (-5) = -3 + 5 = 2$

Para multiplicar dos números con signo:

(a) Si los dos números tienen el mismo signo, se multiplican sus valores absolutos y el producto es positivo.
(b) Si los dos números tienen signos diferentes, se multiplican sus valores absolutos y el producto es negativo.

Ejemplo 3

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

(a) $8(4)$
(b) $8(-4)$
(c) $-8(4)$
(d) $-8(-4)$

Solución

(a) $8(4) = 32$
(b) $8(-4) = -32$
(c) $-8(4) = -32$
(d) $-8(-4) = 32$

Para dividir dos números con signo:

(a) Si los dos números tienen el mismo signo, se dividen sus valores absolutos y el cociente es positivo.
(b) Si los dos números tienen signos diferentes, se dividen sus valores absolutos y el cociente es negativo.

Ejemplo 4

Efectuar las siguientes divisiones:

(a) $8 \div 4$
(b) $8 \div (-4)$
(c) $-8 \div 4$
(d) $-8 \div (-4)$

Solución

(a) $8 \div 4 = 2$
(b) $8 \div (-4) = -2$
(c) $-8 \div 4 = -2$
(d) $-8 \div (-4) = 2$

Ejercicios del apéndice

Efectuar las operaciones que se indican. Ver ejemplos 1, 2, 3 y 4.

1. $7 + 12$
2. $-8 + 11$
3. $6 + (-10)$
4. $-9 + (-8)$

5. $-11 + 8$
6. $13 + 12$
7. $-10 + (-14)$
8. $15 + (-13)$
9. $7 - 12$
10. $-8 - 11$
11. $6 - (-10)$
12. $-9 - (-8)$
13. $-11 - 8$
14. $13 - 12$
15. $-10 - (-14)$
16. $15 - (-13)$
17. $7(12)$
18. $6(-11)$
19. $-5(13)$
20. $-4(-14)$
21. $-8(10)$
22. $9(9)$
23. $15(-11)$
24. $-14(-12)$
25. $24 \div (-4)$
26. $25 \div 5$
27. $-26 \div (-2)$
28. $-27 \div 3$
29. $32 \div 8$
30. $-33 \div 11$
31. $34 \div (-2)$
32. $-36 \div (-6)$

Respuestas a algunos ejercicios

Capítulo 1

Sección 1.1 (pág. 17):

(1) 45045 **(3)** 23023 **(5)** N = 73, D = 73

(7) X = 4, Y = 3, Z = 5 **(9)** X = 6, Y = 8, Z = 10 **(11)** 120

(13) IZQUIERDA = 2, ENMEDIO = 1, DERECHA = 3

(15) IZQUIERDA = 8, ENMEDIO = 4, DERECHA = 7

Sección 1.2 (pág. 22):

(1) $89.25, $505.75

1. Obtener LISTA, TASA.
2. Multiplicar TASA por 0.01 y se asigna a TASA.
3. Multiplicar LISTA por TASA para obtener DESC.
4. Se resta DESC de LIST para obtener VENTA.
5. Mostrar DESC, VENTA.

(3) $5, $18.54, $481.46

1. Obtener B, R y D.
2. Multiplicar R por 0.01 y dividirla entre 12: Asignar el resultado a R.
3. Multiplicar R por B para obtener I.
4. Restar I de D para obtener P.
5. Restar P de B y asignar el resultado a B.
6. Mostrar I, P y B.

(5) $400

1. Obtener R, A y M.
2. Multiplicar R por 0.01 y asignar el resultado a R.
3. Si M es mayor que A, restar A de M y multiplicar el resultado por R para obtener PRIMA.
   En caso contrario, asignar 0 a PRIMA.
4. Mostrar P.

(7) $337
1. Obtener BAL.
2. Obtener AMT.
3. Mientras AMT sea diferente de 0, ejecutar los pasos 4 al 7.
4. Obtener la naturaleza de la operación.
5. Si AMT es un depósito, sumar AMT a BAL.
   En caso contrario, restar AMT de BAL.
6. Obtener el siguiente AMT.
7. Mostrar BAL.

(9) Cuatro meses
1. Obtener BAL, MIN.
2. Asignar a CTR un valor 0.
3. Mientras BAL sea mayor que MIN, ejecutar los pasos 4 y 5.
4. Restar la mitad de BAL de BAL.
5. Sumar 1 a CTR.
6. Mostrar CTR.

Sección 1.3 (pág. 30):

(1) Asignar a BAL el valor 0.
Asignar a CTR el valor 1.
Mientras CTR sea menor que 13,
  Sumar 100 a BAL.
  Multiplicar BAL por 0.01 para obtener INT.
  Sumar INT a BAL (y asignar el resultado a BAL).
  Mostrar BAL.
  Sumar 1 a CTR.
  ENDWHILE (Fin del mientras).

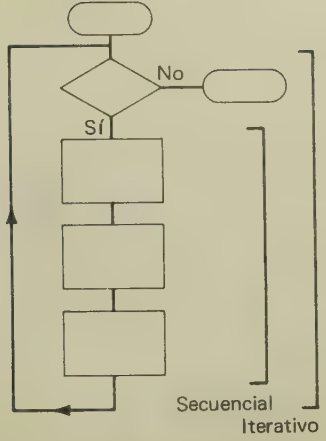
(3) Obtener AMT, NUM, TASA.
Asignar a BAL el valor 0.
Dividir TASA entre 12, multiplicar el resultado por 0.01, y asignarlo a TASA.
Asignar a CTR el valor 1.
Mientras CTR sea menor que NUM + 1,
  Sumar AMT a BAL.
  Multiplicar BAL por TASA para obtener INT.
  Sumar INT a BAL.
  Mostrar BAL.
  Sumar 1 a CTR.
  ENDWHILE (Fin del mientras).

(5) Obtener BAL, PEDIDO, PAGO.
Restar PAGO de BAL.
Si BAL es mayor que 0, multiplicar BAL por 0.01 para obtener CARGO.
En caso contrario, asignar a CARGO el valor 0.
  ENDIF (Fin del si).
  Sumar BAL, PEDIDO y CARGO y asignar el resultado a BAL.

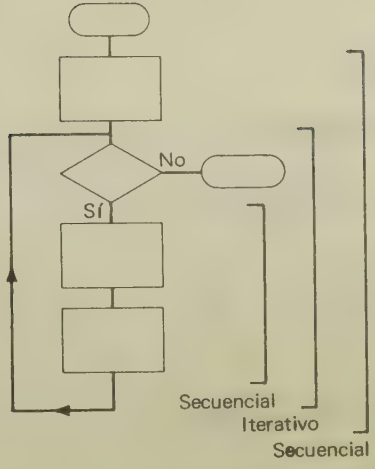
(7) No estructurado

Problemas (9), (11) y (13).

(9)

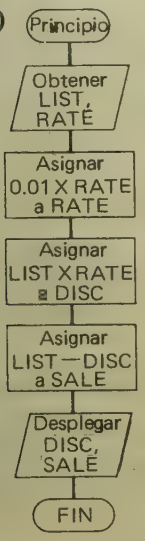


(11)

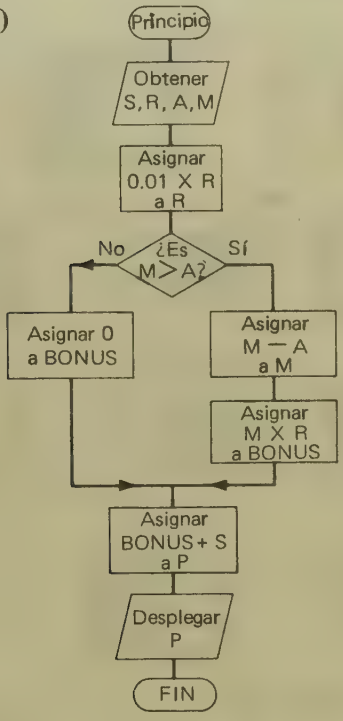


(13) No estructurado

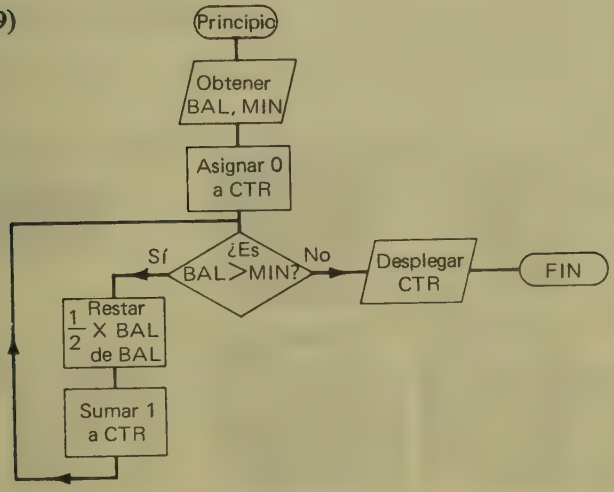
(15)



(17)



(19)



Capítulo 2

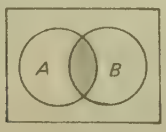
Sección 2.1 (pág. 42):

(1) a. $\{3\}$ b. $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ **(3)** a. $\{1, 4, 8, 10\}$ b. $\{1, 4, 8, 10\}$
(5) a. $\{6, 9\}$ b. $\{2, 5, 7\}$ **(7)** a. $\{\ \}$ b. $\{5, 7, 9, 11\}$
(9) a. $\{5, 7\}$ b. $\{1, 3, 9, 11\}$ **(11)** a. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ b. $\{1, 3\}$ **(13)** $\{4\}$ **(15)** $\{4\}$ **(17)** $\{4\}$
(19) $\{2, 4, 6\}$ **(21)** $\{4\}$ **(23)** $\{8, 10\}$ **(25)** $\{4, 8, 10\}$ **(27)** $W' \cap S$ **(29)** S' **(31)** $W' \cap S'$
(33) $W \cap O'$ **(35)** $S' \cap O$ **(37)** $W \cap (S' \cap O')$ **(39)** $W' \cap (S \cup O)$ **(41)** $F \cap M'$ **(43)** $T \cap R$
(45) M' **(47)** $T' \cap F'$

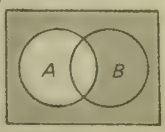
Sección 2.2 (pág. 47):

Problemas (19) al (29)

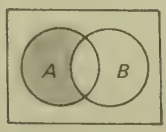
(1)



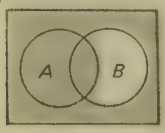
(3)



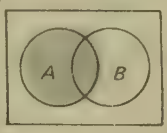
(5)



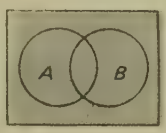
(7)



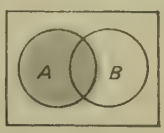
(9)



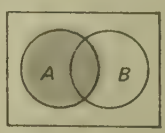
(11)



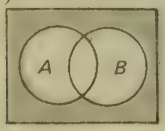
(13)



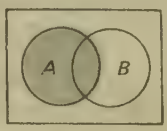
(15)



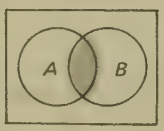
(17)



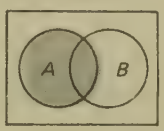
(19) Ambos



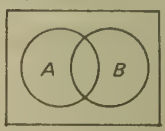
(21) Ambos



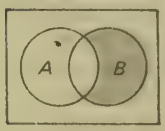
(23) Ambos



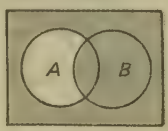
(25) Ambos



(27) Ambos

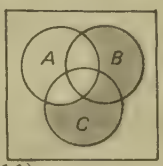


(29) Ambos

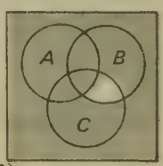


Sección 2.3 (pág. 52):

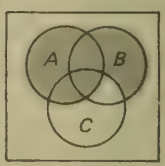
(1)



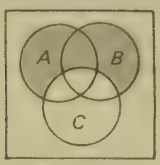
(3)



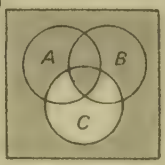
(5)



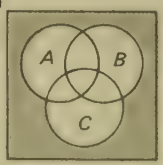
(7)



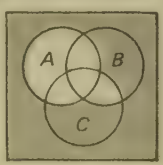
(9)



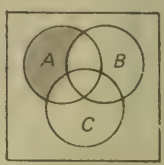
(11)



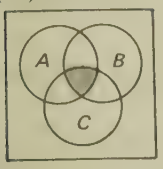
(13)



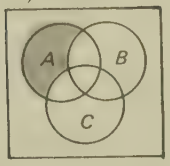
(15)



(17) Ambos



(19) Ambos



(21) Distributiva **(23)** Conmutativa **(25)** Asociativa
(27) Conmutativa **(29)** Asociativa

Sección 2.4 (pág. 56):

(1) I, Q, R **(3)** I, Q, R **(5)** R **(7)** Q, R **(9)** N, I, Q, R
(11) I, Q, R **(13)** R **(15)** Q, R **(17)** $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
(19) $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$ **(21)** $\{5, 10, 15, 20, \ldots\}$ **(23)** $\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$
(25) $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **(27)** $\{\ldots, 3/-2, 3/-1, 3/1, 3/2, 3/3, \ldots\}$ **(29)** $\{\ldots -1/7, 0/7, 1/7, 2/7, \ldots\}$
(31) N **(33)** I **(35)** N **(37)** R **(39)** R **(41)** R

Sección 2.5 (pág. 63):

(1) 21.27 **(3)** 19.74 **(5)** 142 **(7)** 3 **(9)** 4 **(11)** 1
(13) 4 **(15)** 2 **(17)** 2 **(19)** 3 **(21)** 9.7 **(23)** 0.1
(25) 60,000 **(27)** 5.8×10^{1} **(29)** 4.09×10^{2} **(31)** 8.732×10^{3} **(33)** 6×10^{-1} **(35)** 4.278×10^{-1}
(37) 234 **(39)** 0.508 **(41)** 820 **(43)** 3452 **(45)** 0.657

Sección 2.6 (pág. 69):

(1) 14 **(3)** 2 **(5)** 98 **(7)** −1 **(9)** −4
(11) 16 **(13)** 486 **(15)** −56 **(17)** 36 **(19)** 18
(21) 4*Y+2*X **(23)** (X+2*Y)*(2*X−Y) **(25)** X−2*Y+3 **(27)** 3*(X+2*(Y−1))
(29) (4*A*B)/(5*C*D) or 4*A*B/(5*C*D) **(31)** (4+X)/(Y−5) **(33)** (A+3)/(B+2)
(35) 3*(X*(Y*(Z−2)−3)−4) **(37)** 2*2*2 **(39)** X*Y*Y

Sección 2.7 (pág. 75):

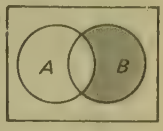
(1) sí, sí **(3)** sí, no **(5)** no, sí **(7)** no, no **(9)** no, sí
(11) sí, sí **(13)** no, no **(15)** no, sí **(17)** no, no
(19) no, sí **(21)** sí, no **(23)** no, no **(25)** no, no **(27)** no, no **(29)** no, sí **(31)** Asociativa para la adición **(33)** Conmutativa para la adición **(35)** Neutro aditivo **(37)** Neutro multiplicativo
(39) Conmutativa y asociativa de la multiplicación **(41)** Inverso aditivo

Sección 2.8 (pág. 80):

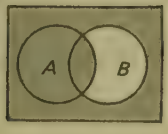
(1) 2 2/5, 2 **(3)** 3 1/2, 3 **(5)** 2, 0 **(7)** 16, 0 **(9)** 9, 9
(11) 4, 0 **(13)** 6 2/5, 6 **(15)** 6 2/5, 0 **(17)** 1, 0 **(19)** 2 1/2, 2
(21) 0 **(23)** 3 **(25)** 0 **(27)** 3 **(29)** 3 **(31)** 4 **(33)** 5 **(35)** 2

Prueba del capítulo 2 (pág. 82):

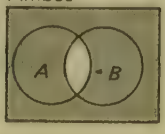
(1) a. $\{3, 5\}$ b. $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **(2)** a. $\{4\}$ b. $\{1, 2, 4, 5, 7\}$
(3) a. $\{4, 6\}$ b. $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ **(4)** a. $C \cup F$
b. $F \cap B$ **(5)** a. $B \cap F'$ b. $(C \cup F) \cap B'$ **(6)** a. $(B \cup C)'$ b. $(B \cap C) \cap F'$ **(7)**



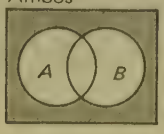
(8)



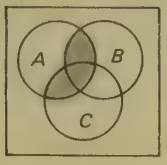
(9) Ambos



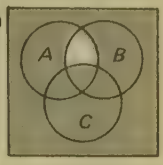
(10) Ambos



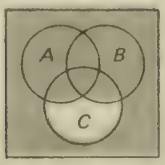
(11)



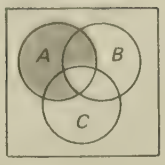
(12)



(13) Ambos

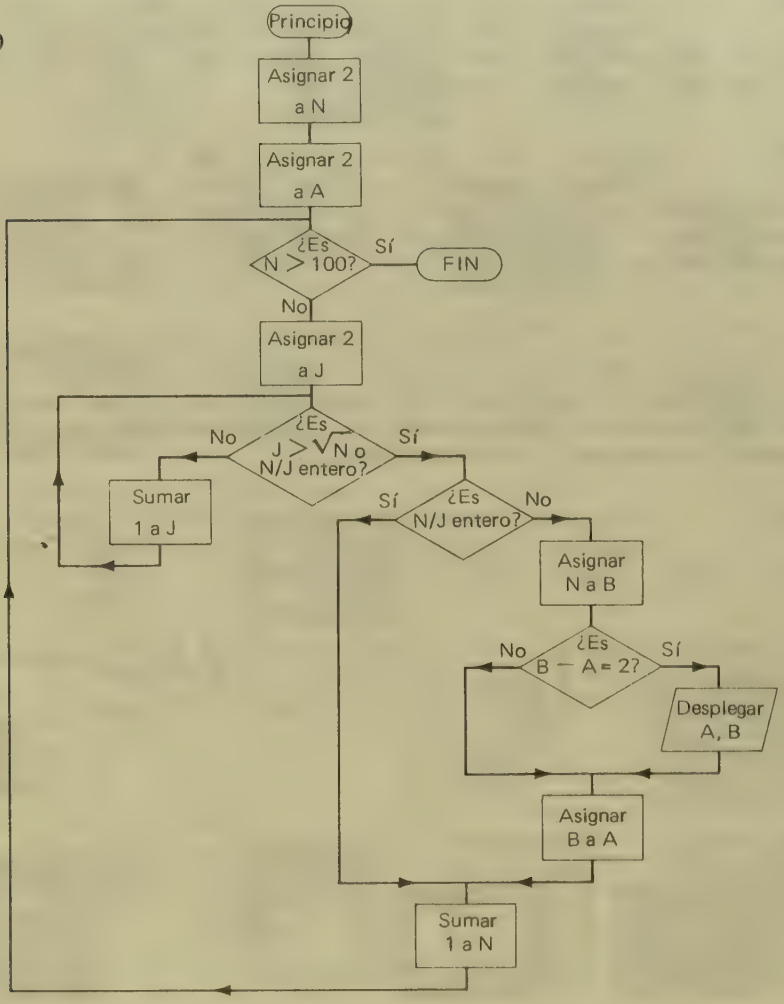


(14) Ambos



(15) a. Distributiva b. Asociativa c. Conmutativa **(16)** a. N, I, Q, R b. Q, R c. R d. I, Q, R e. Q, R f. N, I, Q, R **(17)** $\{5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ **(18)** $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1\}$ **(19)** R **(20)** I **(21)** a. 47.4 b. 8.08 **(22)** a. 2 b. 3 c. 2 **(23)** a. 0.001 b. 10 a 2 dígitos significativos **(24)** a. 8.35×10^2 b. 5.1×10^{-3} **(25)** a. 0.0793 b. 6400 **(26)** 81 **(27)** 1 **(28)** 125 **(29)** 3*(X − 3*(Y − 1)) **(30)** (3*A + B)/(4*C*D) **(31)** sí, sí **(32)** no, sí **(33)** no, no **(34)** a. Asociativa b. Conmutativa c. Inverso aditivo **(35)** a. Distributiva b. Neutro multiplicativo c. Inverso multiplicativo **(36)** 1, 0 **(37)** 1, 0 **(38)** 5 **(39)** 0 **(40)** 2

(41)



Capítulo 3

Sección 3.1 (pág. 93): **(1)** $c \vee f$ **(3)** $c \wedge f$ **(5)** $(c \wedge b) \vee p$ **(7)** $\sim m \wedge \sim a$ **(9)** $(m \wedge a) \wedge \sim v$ **(11)** $(\sim m \wedge a) \wedge \sim t$ **(13)** $o \wedge r$ **(15)** $(o \wedge r) \wedge d$ **(17)** $s \vee (o \wedge d)$ **(19)** $a \wedge r$ **(21)** $f \wedge \sim (w \vee s)$ **(23)** $\sim (w \vee s)$ **(25)** $t \wedge \sim z$ **(27)** $f \vee z$ **(29)** $f \wedge \sim z$

Sección 3.2 (pág.102): **(1)** VFFF **(3)** FV **(5)** FFFV **(7)** VVFV **(9)** FVFF **(11)** FFFV para ambos **(13)** $\sim r \vee \sim s$ **(15)** $p \wedge \sim q$ **(17)** $r \wedge s$ **(19)** $\sim (p \vee q)$ **(21)** sí **(23)** no

Sección 3.3 (pág.108): **(1)** $(p \wedge (\sim q)) \vee r$ **(3)** $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ **(5)** $((\sim p) \wedge q) \wedge (\sim r)$ **(7)** $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ **(9)** $((\sim p) \vee q) \vee (r \wedge (\sim s))$ **(11)** $((p \wedge (\sim q)) \wedge r) \vee (\sim s)$ **(13)** VVVVVFVV **(15)** VVVVFFVF **(17)** VFVVVVVV **(19)** FFFFFFVF **(21)** FFFVVVVV **(23)** no **(25)** sí **(27)** sí **(29)** no

Sección 3.4 (pág. 112):

(1) $f \rightarrow p$ **(3)** $s \rightarrow e$ **(5)** $l \rightarrow e$ **(7)** $d \rightarrow e$ **(9)** $(h \vee m) \rightarrow d$ **(11)** $\sim d \rightarrow \sim (b \vee h)$ **(13)** $p \rightarrow f$ **(15)** $h \rightarrow l$ **(17)** $c \rightarrow m$ **(19)** $t \rightarrow n$ **(21)** $(p \vee (\sim q)) \rightarrow r$ **(23)** $p \rightarrow (q \wedge r)$ **(25)** $((\sim p) \wedge q) \rightarrow r$ **(27)** $(p \wedge r) \rightarrow (q \vee s)$ **(29)** $((p \wedge q) \vee s) \rightarrow r$

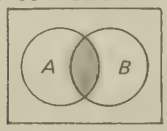
(31) Si el programa es fácil de seguir, entonces es estructurado. Si el programa no es estructurado, entonces no es fácil de seguir. Si el programa no es fácil de seguir, entonces no es estructurado. No ocurre que si el programa no es estructurado, entonces es fácil de seguir. **(33)** Si los programas son fáciles de guardar, entonces se documentan. Si no se documentan los programas, entonces no será fácil guardarlos. Si los programas no son fáciles de guardar, entonces no se documentan. No ocurre que si los programas se documentan, entonces será fácil documentarlos. **(35)** Si el lector tiene acceso a la computadora, entonces sabe la contraseña. Si el lector no sabe la contraseña, entonces no puede tener acceso a la computadora. Si el lector no puede tener acceso a la computadora, entonces no sabe la contraseña. No ocurre que si el lector sabe la contraseña, entonces puede tener acceso a la computadora.

Sección 3.5 (pág.122): **(1)** VVVF **(3)** FVVV **(5)** VFVV para ambos **(7)** FVVV para ambos **(9)** VFVVVVVV **(11)** VVVVVFVV **(13)** FVVVVVVV **(15)** VVFVVVVV **(17)** VVFVVVVV **(19)** válido **(21)** inválido **(23)** válido

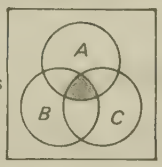
Sección 3.6 (pág.125): **(1)** (A < 3) O (B > 5) **(3)** ((A > 0) O (A < 5)) O (C > −3) **(5)** (A > 0) O ((C > −3) y (C < 5)) **(7)** (X < 0) O (Y < 0) **(9)** ((C = 3) y (X <> 0)) O (Y <> 0) **(11)** {1, 2} **(13)** { } **(15)** {0, 7, 8, 9, . . .} **(17)** {1, 2, 6, 7, 8, . . .} **(19)** {1, 2} **(21)** acción 2 **(23)** acción 1 **(25)** acción 1 **(27)** acción 1 **(29)** acción 1

Sección 3.7 (pág. 132):

(1) Conmutativa: VFFF (3) Asociativa: VFFFFFFF

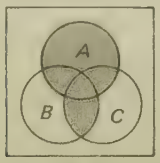


para ambos

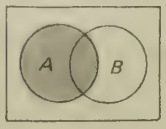


para ambos

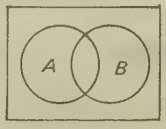
(5) Distributiva: VVVVVFFF (7) Idempotencia: VF (9) Ley de complementación: FF



para ambos

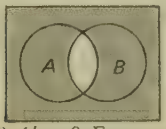


para ambos

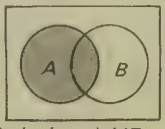


para ambos

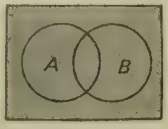
(11) Ley de De Morgan: FVVV (13) Ley de absorción: VVFF (15) $A + 1 = 1$: VV



para ambos



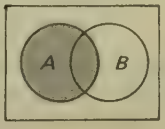
para ambos



para ambos

(17) $1' = 0$: F (19) $A \cdot 1 = A$: VF

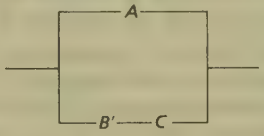
para ambos



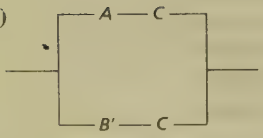
para ambos

Sección 3.8 (pág. 138):

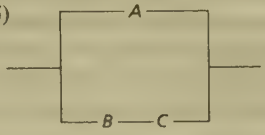
(1) $AB + C$ (3) $A(B + B')$ (5) $(AB') + (BA')$ (7) $A(B + C)$
(9) $(B + C') + (B'C)$ (11)



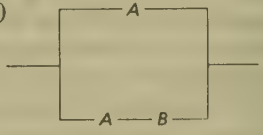
(13)



(15)



(17)

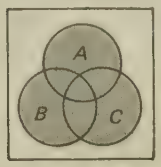


(19) —A—B'—A—B— (21) B (23) A (25) $BA + C$ (27) AC' (29) $B + AC$
(31) 1110 (33) 1111 (35) 1001 (37) 0000

Prueba del capítulo 3 (pág. 141):

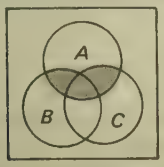
(1) $s \wedge c$ (2) $t \wedge d$ (3) $d \wedge \sim c$ (4) $(s \vee t) \wedge d$
(5) $t \wedge (d \vee c)$ (6) FFVF (7) FFVF (8) $\sim p \wedge q$
(9) sí (10) no (11) $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ (12) $((\sim p) \wedge (\sim q)) \vee r$ (13) FVVVFVFV (14) sí
(15) sí (16) $p \rightarrow \sim c$ (17) $h \rightarrow (r \wedge c)$ (18) $(p \wedge (\sim q)) \rightarrow (r \wedge s)$
(19) Si no se calientan los limones antes de usarlos, entonces no tendrán el doble de jugo. No ocurre que si se calientan los limones antes de usarlos, entonces tendrán el doble de jugo. (20) Si las claras de huevo toman un color oscuro, entonces se baten en un recipiente de aluminio. Si las claras de huevo no toman un color oscuro, entonces no se baten en un recipiente de aluminio.
(21) VVFV (22) VVFV para ambos.

(23) VVVVVFVV **(24)** FFVFVVVV **(25)** inválido **(26)** (X > 3) y (X < = 5) **(27)** (A > 0) o ((A < = 7) y (B > 2)) **(28)** {6} **(29)** acción 1 **(30)** acción 2 **(31)** Asociativa: VVVVVVVF

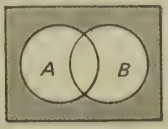


para ambos

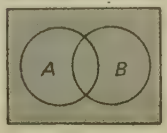
(32) Distributiva (• respecto a +): VVVFFFFF **(33)** Ley de De Morgan: FFFV **(34)** Ley de complementación: VV



para ambos

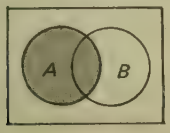


para ambos



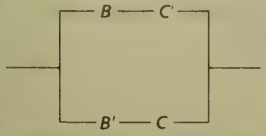
para ambos

(35) Ley de absorción: VVFF **(36)** $(B' + (C + B))C'$

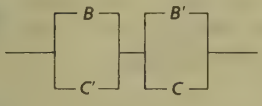


para ambos

(37)

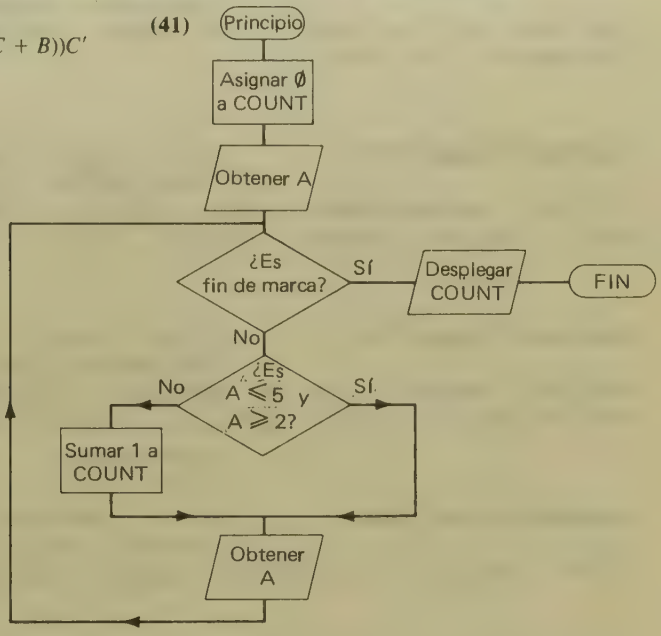


(38)



(39) AB **(40)** 1000

(41)



Capítulo 4

Sección 4.1 (pág. 153): **(1)** 6 **(3)** 7 **(5)** 11 **(7)** 12 **(9)** 55 **(11)** 58 **(13)** 35 **(15)** 150 **(17)** 189 **(19)** 187 **(21)** 1001 **(23)** 10010 **(25)** 100011 **(27)** 101111 **(29)** 110101 **(31)** 111111 **(33)** 1000010 **(35)** 1010001 **(37)** 1101110 **(39)** 11000110

Sección 4.2 (pág. 160): **(1)** 3.375 **(3)** 3.1875 **(5)** 6.4375 **(7)** 6.53125 **(9)** $0.0\overline{1001}$ **(11)** $0.0\overline{10110}$ **(13)** $0.00\overline{11100}$ **(15)** 1000.011 **(17)** 55 **(19)** 45 **(21)** 36 **(23)** 100010 **(25)** 1001111 **(27)** 10111001

Sección 4.3 (pág. 169): **(1)** 10010 **(3)** 1001.101 **(5)** 1001.111 **(7)** 10100 **(9)** 101101.001 **(11)** 1001 **(13)** 1.0101 **(15)** 1.10 **(17)** 101.010 **(19)** 10.11 **(21)** 10101 **(23)** 1.111 **(25)** 0.101 **(27)** 11.0111 **(29)** 1000.1111 **(31)** 100 **(33)** 101 **(35)** 111 R 1 **(37)** 11 R 1 **(39)** 110 R 101

Sección 4.4 (pág. 176): **(1)** 10110110 **(3)** 10011010 **(5)** 11111111 **(7)** 01001011 **(9)** 00011001 **(11)** 01101101 **(13)** 00100000 **(15)** 00110011 **(17)** 00101011 **(19)** 01011100 **(21)** 01101101, el mismo **(23)** 00100000, el mismo **(25)** 00110011, el mismo **(27)** 43, el mismo **(29)** 92, el mismo

Sección 4.5 (pág. 180): **(1)** 00100101 **(3)** 00101101 **(5)** 00110100 **(7)** 01001110 **(9)** 01011011 **(11)** 01111011 **(13)** 45 **(15)** 54 **(17)** 85 **(19)** −103 **(21)** −86 **(23)** −1 **(25)** 00001000 **(27)** 11000100 **(29)** 01000010 **(31)** 00011000 **(33)** 00001111 **(35)** 11001111

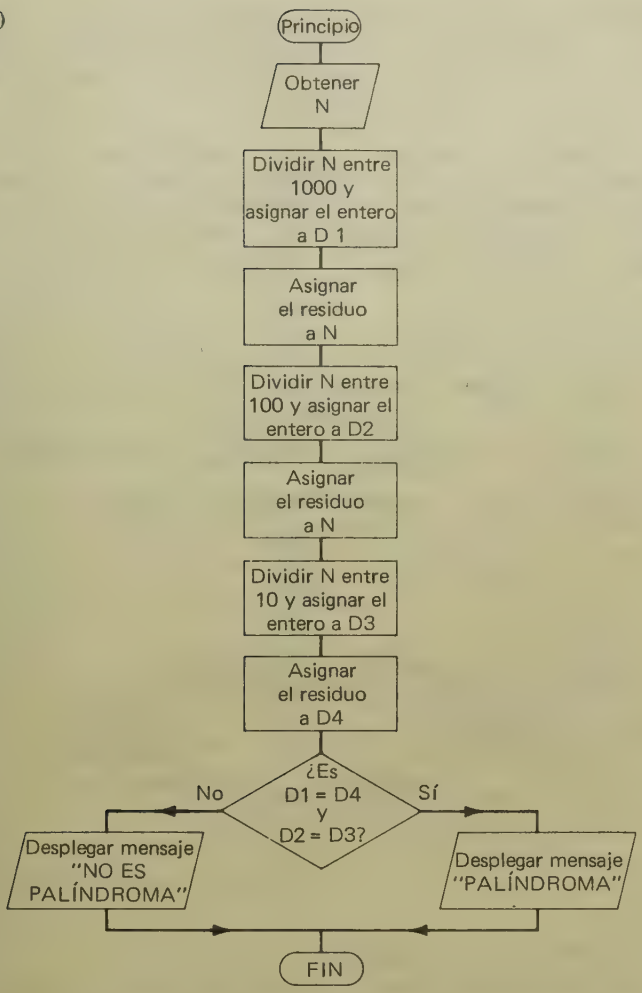
Sección 4.6 (pág. 185): **(1)** 58 **(3)** 132 **(5)** 9.140625 **(7)** 34.765625 **(9)** 520.126953125 **(11)** 324 **(13)** 267 **(15)** 26.75 **(17)** 5.625 **(19)** 483.25390625 **(21)** 42 **(23)** 73.2 **(25)** 1144 **(27)** 120.3 **(29)** 1057 **(31)** 22 **(33)** 3B.4 **(35)** 264 **(37)** 50.6 **(39)** 22F

Sección 4.7 (pág. 190): **(1)** 56 **(3)** 132.7 **(5)** 153.4 **(7)** 12.54 **(9)** 110010 **(11)** 10010.011 **(13)** 11.0001 **(15)** 1010.100111101 **(17)** 2E **(19)** 5A.E **(21)** 6B.8 **(23)** A.B **(25)** 10010011 **(27)** 10100011.1 **(29)** 10.1101111 **(31)** 11011.00001111 **(33)** 22 **(35)** A.9C **(37)** 3.64 **(39)** 12.126

Sección 4.8 (pág. 199): **(1)** 722 **(3)** 66.35 **(5)** 12.756 **(7)** 5176 **(9)** 136.32 **(11)** 564 **(13)** 60.55 **(15)** 7.131 **(17)** 3F2 **(19)** A.43 **(21)** 578 **(23)** 6CC.C **(25)** EB.DFC **(27)** 3A8 **(29)** 4.C3

Prueba del capítulo 4 (pág. 200): **(1)** 229 **(2)** 157 **(3)** 110111 **(4)** 10011001 **(5)** 11001001 **(6)** 5.5625 **(7)** 3.34375 **(8)** 7.8125 **(9)** 0.0011 **(10)** 111.00$\overline{1001}$ **(11)** 1001.011 **(12)** 11001 **(13)** 100.001 **(14)** 111.0011 **(15)** 1000 R 11 **(16)** a. 11010011 b. 00100101 **(17)** 00111110 **(18)** 00100100 **(19)** 00111110 **(20)** 36 **(21)** a. 00111111 b. 11000001 **(22)** a. 01100111 b. 10011001 **(23)** a. 23 b. −26 **(24)** 00001111 **(25)** 11001011 **(26)** 307 **(27)** 700 **(28)** 43.75 **(29)** 323.6 **(30)** D3.C **(31)** 307.1 **(32)** 101111.0111 **(33)** C7.2 **(34)** 110100111.1110011 **(35)** 322.37 **(36)** 160.44 **(37)** 63.14 **(38)** 30.51 **(39)** 4.70D **(40)** 24F

(41)



Sección 5.1 (pág. 209): **(1)** $6x^5$ **(3)** $14y^7$ **(5)** $48x^9$ **(7)** $2xy^2$ **(9)** $y^2/2$ **(11)** 1 **(13)** 1/16 **(15)** 1/1000 **(17)** $56/x$ **(19)** x^3y^3z **(21)** $2x/y$ **(23)** $4y^2/z$ **(25)** $1/(2a^4)$ **(27)** $4y^3/x^4$ **(29)** $2y/(3x)$

Sección 5.2 (pág. 215): **(1)** a^6 **(3)** 2^{12} or 4096 **(5)** 5^9 **(7)** $9a^2$ **(9)** $16b^2$ **(11)** $8/x^3$ **(13)** $y^5/6^5$ **(15)** a^4/b^4 **(17)** No es un número real **(19)** 3 **(21)** -3 **(23)** 4 **(25)** No es un número real **(27)** 9 **(29)** $\sqrt[4]{125}$ **(31)** x^8y^4 **(33)** $3x^6/y^3$ **(35)** $1/(5xy)$ **(37)** $9b^2/16$ **(39)** $64b^6/125$ **(41)** y^3/x **(43)** $3a/(5b^2)$ **(45)** $b^3c^6/(8a^3)$ **(47)** $16a^2/9$ **(49)** $a^3b^3/6$ **(51)** 4/5 **(53)** $x^3/8$ **(55)** $1/(27a^3)$

Sección 5.3 (pág. 222): **(1)** 2 factores **(3)** 2 términos **(5)** 3 términos **(7)** 2 factores **(9)** 2 términos **11)** $3x + 2y$ **(13)** $3x - 3 + y$ **(15)** $4x^2 - x + 1$

(17) $3a^2 + 5a - 3$ **(19)** $x + 3$ **(21)** $2x^2 - 2x$ **(23)** $3x^3 - 3x^2 + 12x$ **(25)** $2x^2 - x - 3$ **(27)** $15y^2 - 23y + 4$ **(29)** $x^2 - 7xy + 10y^2$ **(31)** $6x^3 - 13x^2 + 8x - 3$ **(33)** $x^3 + 27$ **(35)** $3a^3 - 2a^2 - 13a + 10$ **(37)** $y^4 + y^3 - 7y^2 + 7y - 2$ **(39)** $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ **(41)** $x^2 + x - 1$ **(43)** $x^2 - x - 7$ **(45)** $x^2 - 4$ **(47)** $6x^2 - 6$

Sección 5.4 (pág. 227):

(1) $2x(x + 1)$ **(3)** $3m(m^2 - m + 2)$ **(5)** $(x + 2)(x + 3)$ **(7)** $(z - 3)(z + 2)$ **(9)** $(p + 4)(p + 6)$ **(11)** $(y - 3)(y - 8)$ **(13)** $(2z - 3)(3z - 2)$ **(15)** $(5x + 1)(x + 5)$ **(17)** $(3p + 4)(4p - 3)$ **(19)** $3(x - 2)(x - 2)$ **(21)** $(z + 8)(z - 3)$ **(23)** $4(m + 2)(m - 2)$ **(25)** primo **(27)** $4y^2(y + 2)$ **(29)** $(p + 4)(p + 5)$ **(31)** $(m - 3)(m - 5)$ **(33)** $2(a - 10)(a - 2)$ **(35)** $(2a + 1)(3a - 5)$ **(37)** $(2m + 3)(m - 3)$ **(39)** primo **(41)** $(3x - 2)(3x + 2)$

Sección 5.5 (pág. 234):

(1) 2/3 **(3)** 4/15 **(5)** 1/3 **(7)** $\dfrac{y + 3}{y - 3}$ **(9)** $\dfrac{x + 2}{x + 3}$ **(11)** $\dfrac{z - 4}{z - 5}$ **(13)** $\dfrac{y + 2}{y + 1}$ **(15)** 18/49 **(17)** 1/6 **(19)** 1 **(21)** $\dfrac{y - 2}{y + 3}$ **(23)** $\dfrac{m + 5}{m - 3}$ **(25)** $\dfrac{a^2 - 4a + 3}{a^2 + 4a + 3}$ **(27)** 1 **(29)** $\dfrac{x - 3}{x + 4}$ **(31)** 3/4 **(33)** m^2 **(35)** $\dfrac{x + 1}{x - 2}$

Sección 5.6 (pág. 240):

(1) $\dfrac{a^2 + b^2}{ab}$ **(3)** $\dfrac{p^3 + q^2}{p^2q}$ **(5)** $\dfrac{y^2 + 1}{(y - 1)^2(y + 1)}$ **(7)** $\dfrac{-x^2 + 6x + 9}{x(2x - 3)(2x + 3)}$ **(9)** $\dfrac{2y^2 + 2}{y^2 - 1}$ **(11)** $\dfrac{p^2 + 1}{2p(p^2 - 1)}$ **(13)** $\dfrac{8m + 6}{m^2 - 4}$ **(15)** $\dfrac{-x - 1}{(3x + 1)^2}$ **(17)** $\dfrac{-z + 5}{z^2 + z}$ **(19)** $\dfrac{a^2 + 4a + 2}{a^2 - 1}$ **(21)** $\dfrac{-m^2 + 9m + 13}{m^2 - 2m - 8}$ **(23)** $\dfrac{z + 1}{z}$

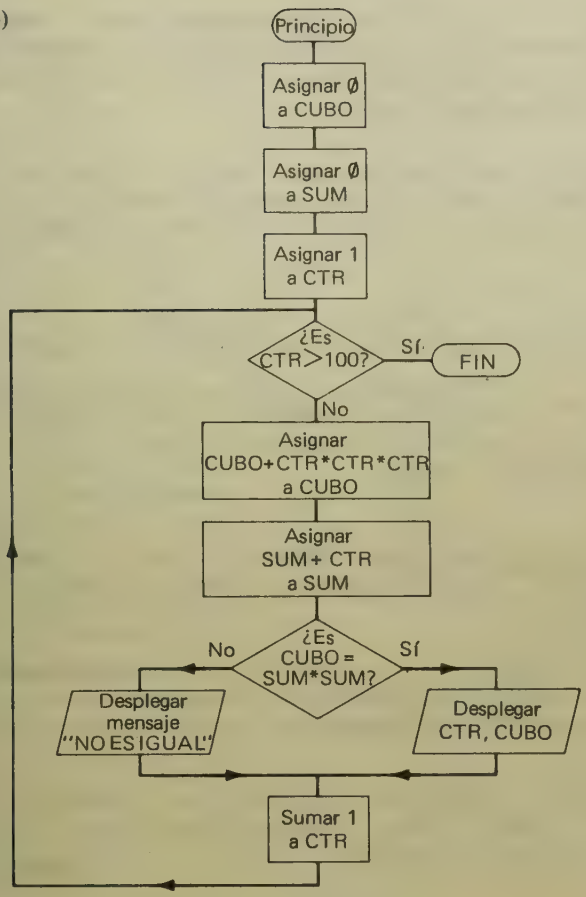
Sección 5.7 (pág. 246):

(1) X*(X − 7) + 2 **(3)** X*(X*4 + 3) − 1 **(5)** X*(X*(X + 4) − 3) + 2 **(7)** X*(X*(X*8 − 6) + 4) − 3 **(9)** X*(X*(X − 2) + 0) + 3 **(11)** X*(X*(X*(X + 3) + 2) − 1) − 1 **(13)** X*(X*(X*(X*3 + 2) − 1) + 7) − 5 **(15)** X*(X*(X*(X − 1) + 1) − 1) + 1 **(17)** 3, 2 **(19)** 2, 2 **(21)** 6, 3 **(23)** 5, 3 **(25)** 3, 2 **(27)** 10, 4 **(29)** 10, 4

Prueba del capítulo 5 (pág. 247):

(1) $35x^4y^3$ **(2)** $\dfrac{35}{a^2b}$ **(3)** 16 **(4)** $9mn$ **(5)** $\dfrac{15x^3z^2}{yw^2}$ **(6)** $8a^3b^6$ **(7)** $3a^6/b^4$ **(8)** $8x^3/27$ **(9)** $9z^2/4$ **(10)** 25 **(11)** $5x^2 + x + 3$ **(12)** $y^2 - 4y + 4$ **(13)** $6m^2 - 7m - 3$ **(14)** $8p^3 - 4p + 1$ **(15)** $z^2 - 5z + 11$ **(16)** $5x(x - 2)$ **(17)** $(z - 4)(z + 3)$ **(18)** $(a + 4)(a + 7)$ **(19)** $(3x - 1)(2x + 3)$ **(20)** $y(3y - 1)(3y + 1)$ **(21)** 2/3 **(22)** $\dfrac{2x + 1}{x + 2}$ **(23)** 4/15 **(24)** $\dfrac{m + 1}{m + 3}$ **(25)** $\dfrac{p + 1}{p - 3}$ **(26)** $\dfrac{x^3 + y^2}{x^2y}$ **(27)** $\dfrac{3a^2 + 2a}{a^2 - 4}$ **(28)** $\dfrac{z^2 - z - 1}{2z^2 + z - 3}$ **(29)** $\dfrac{2p - 1}{p^2 - p - 6}$ **(30)** $\dfrac{-z^2 + 6z + 9}{3z^2}$ **(31)** X*(X*3 + 2) − 1 **(32)** X*(X*(X*3 − 2) + 5) − 4 **(33)** X*(X*(X*(X + 2) − 3) + 4) − 5 **(34)** 6, 4 **(35)** 6, 3

(36)



Capítulo 6

Sección 6.1 (pág. 256): **(1)** $x = 4/5$ **(3)** $z = -2/3$ **(5)** $x = 25$ **(7)** $m = 9$ **(9)** $x = 9/2$ **(11)** $p = -14/5$ **(13)** $x = -1/9$ **(15)** $x = 0$ **(17)** $p = 7/8$ **(19)** $m = 9$ **(21)** $x = -2$ **(23)** $x = 5$ **(25)** $z = 2$ **(27)** $y \leq 7/2$ **(29)** $x < 9/4$ **(31)** $p > 6$ **(33)** $y \geq 2/5$ **(35)** $m < -2/3$

Sección 6.2 (pág. 260): **(1)** $m = F/a$ **(3)** $g = \dfrac{\omega}{nmh}$ **(5)** $L = \dfrac{P - 2W}{2}$ **(7)** $a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)}$ **(9)** $F = Eq$ **(11)** $V = h\pi r^2$ **(13)** $G = \dfrac{Fr^2}{M_1M_2}$ **(15)** $q = F/E$ **(17)** $x_0 = x - v_0t - \dfrac{1}{2}at^2$ **(19)** $t_2 = \dfrac{s_2 - s_1 + vt_1}{v}$ **(21)** $e = \dfrac{Itm}{Mz}$ **(23)** $s = \dfrac{pE}{E - p}$ **(25)** $r = \dfrac{2ak^2m}{v^2a - k^2m}$ **(27)** $i = \dfrac{of}{o - f}$ **(29)** $m_2 = \dfrac{4a^3\pi^2 - p^2k^2m_1}{p^2k^2}$

Sección 6.3 (pág. 268): **(1)** 99 **(3)** 32 m/s^2 **(5)** 15 por ciento **(7)** 2 litros **(9)** \$500 al 8 por ciento, \$1500 al 9 por ciento **(11)** Debe vender \$1,000,000, y debe incorporar a la lista \$2,000,000 **(13)** 2 horas 12 minutos **(15)** 3 Kph y 3.5 kph **(17)** \$120 **(19)** 150 **(21)** 1 lb. **(23)** aproximadamente 4 horas 46 minutos **(25)** aproximadamente 47 o z

Sección 6.4 (pág. 274): **(1)** 1, 4 **(3)** −3, 2 **(5)** −6, 4 **(7)** 2, −1 **(9)** 1, 8 **(11)** 3/2, 2/3 **(13)** 1/2, −3/2 **(15)** 1/3 **(17)** 0, −1 **(19)** 1, −1 **(21)** 4, −4 **(23)** 6/5, −6/5 **(25)** 5/2, −1/3 **(27)** −3/2, 1/3 **(29)** 5, −2 **(31)** 3, 5 **(33)** 2/3, −5 **(35)** 2, −2

Sección 6.5 (pág. 280): **(1)** $2 \pm \sqrt{2}$ **(3)** $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ **(5)** $\frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$ **(7)** $\pm\sqrt{21}$ **(9)** 0, 7/2 **(11)** $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$ **(13)** 7, −1 **(15)** $-4 \pm \sqrt{15}$ **(17)** $\frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$ **(19)** $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$ **(21)** $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$ **(23)** 0, 3

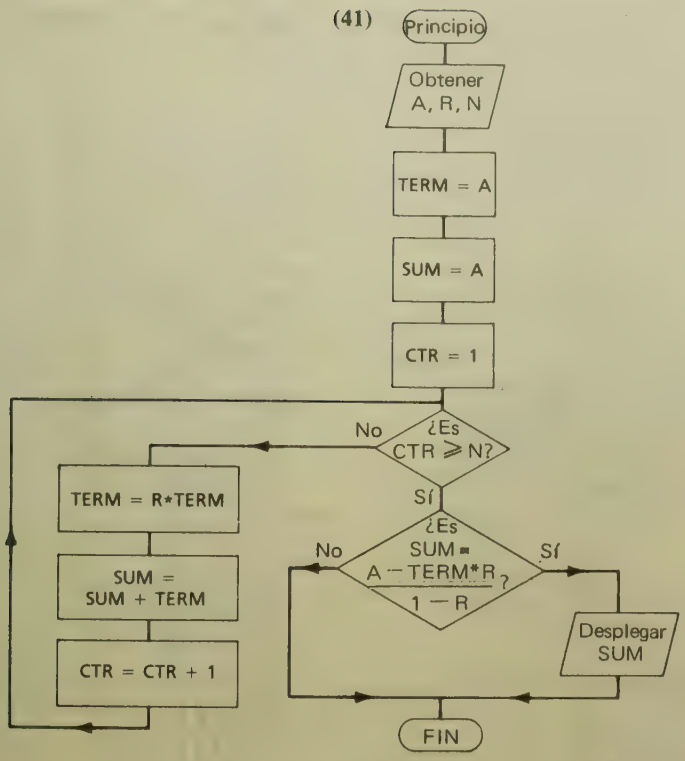
Sección 6.6 (pág. 287): **(1)** 0, 2, 3 **(3)** $\pm 1, \pm 3$ **(5)** $\pm 1, \pm 2$ **(7)** ± 1 **(9)** 0, 1/2, 1 **(11)** 1.73 **(13)** 1.62 **(15)** 1.82 **(17)** 2.4 **(19)** 2.3 **(21)** 4.64 **(23)** 4.05

Sección 6.7 (pág. 293): **(1)** $x = -9/10$ **(3)** $x = 2$ **(5)** $z = 1/4$ **(7)** no hay solución **(9)** $x = 33/13$ **(11)** $x = 6, -25/4$ **(13)** $a = 1$ **(15)** $y = -1/3$ **(17)** $a = 1$ **(19)** no hay solución **(21)** no hay solución **(23)** $x = 1/4$

Sección 6.8 (pág. 298): **(1)** X = 5 **(3)** TC = 10 **(5)** X = 4, Y = 4 **(7)** A = 2, B = 5 **(9)** X = 2, Y = 2 **(11)** A = 5, B = 4, C = 4 **(13)** A = 2, B = 3 **(15)** X = −1, Y = 4 **(17)** A = 5, B = 4, C = 8

Prueba del capítulo 6 (pág. 300): **(1)** $x = 3$ **(2)** $p = 50$ **(3)** $z = -1$ **(4)** $x = 1$ **(5)** $y \leq 3$ **(6)** $x < -1$ **(7)** $R = D/T$ **(8)** $W = A/L$ **(9)** $C = \frac{5F - 160}{9}$ **(10)** $a = L - (n-1)d$ **(11)** $d = \frac{L - a}{n - 1}$ **(12)** $a = S(1 - r)$ **(13)** \$30,000 **(14)** 6 litros **(15)** 50 kph y 55 kph **(16)** 14, 1 **(17)** 3, 7 **(18)** −5/2, −1 **(19)** −5, 1 **(20)** 5, −3 **(21)** $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ **(22)** $-1 \pm \sqrt{2}$ **(23)** 2, −1/2 **(24)** $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$ **(25)** $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ **(26)** 0, 1, 2 **(27)** 0, −2, 1 **(28)** $0, \pm 1, \pm 2$ **(29)** 2.93 **(30)** 3.07 **(31)** $x = 5/3$ **(32)** $a = -3$ **(33)** no hay solución **(34)** $x = -6$ **(35)** no hay solución **(36)** A = 2, B = 6 **(37)** B = 9 **(38)** A = 18, B = 6 **(39)** X = 1, Y = 4, Z = 4 **(40)** X = 16, Y = 4

(41)

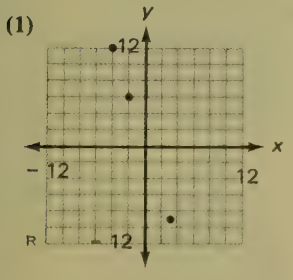


Capítulo 7

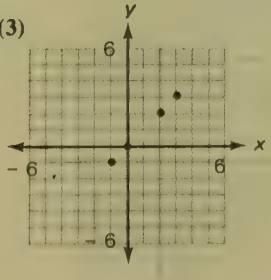
Sección 7.1 (pág. 310): **(1)** sí **(3)** sí **(5)** sí **(7)** sí **(9)** no **(11)** 0 **(13)** 0 **(15)** 5 **(17)** −1 **(19)** 19 **(21)** 1 **(23)** 6 **(25)** 5 **(27)** no **(29)** sí , $\{x \mid x \in R, x \neq 1\}$ **(31)** sí , $\{x \mid x \in R, x \geq 4\}$ **(33)** sí , R **(35)** sí , R

Sección 7.2 (pág. 315):

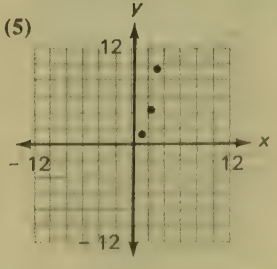
(1)



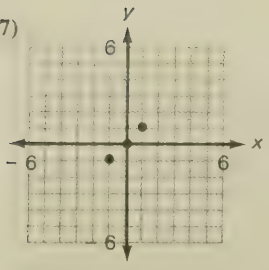
(3)



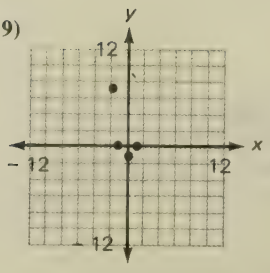
(5)



(7)



(9)

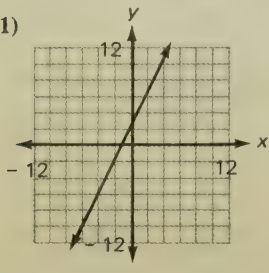


(11) no **(13)** no **(15)** sí

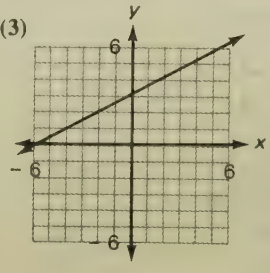
(17) sí **(19)** no

Sección 7.3 (pág. 323):

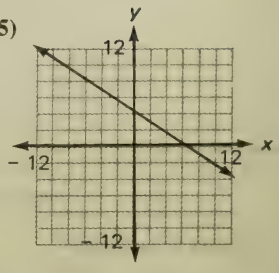
(1)



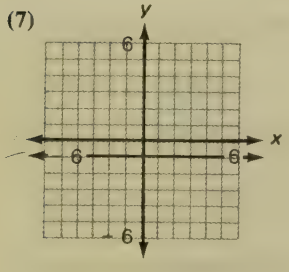
(3)



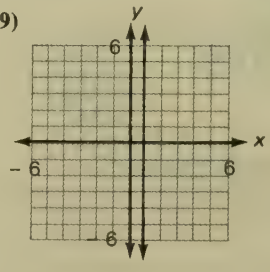
(5)



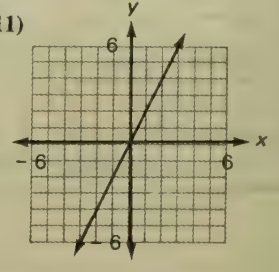
(7)



(9)



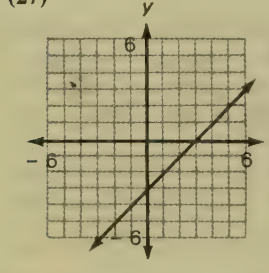
(11)



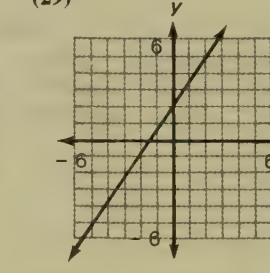
(13) $m = 3, b = -2$ **(15)** $m = -2, b = 5$ **(17)** $m = 2, b = -4$ **(19)** $m = 1/2, b = -1/2$

(21) $m = 3, b = -7$ **(23)** $m = 1/2, b = 0$ **(25)** $m = 0, b = 4$

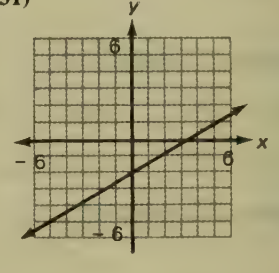
(27)



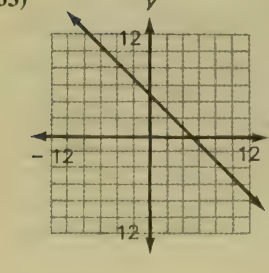
(29)



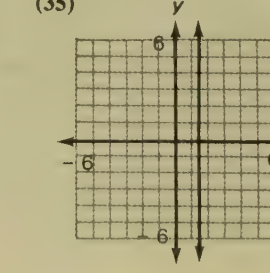
(31)



(33)

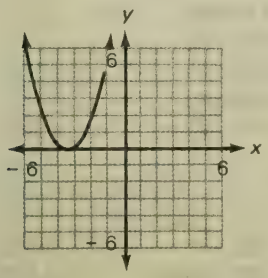


(35)

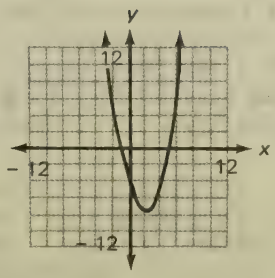


Sección 7.4 (pág. 327):

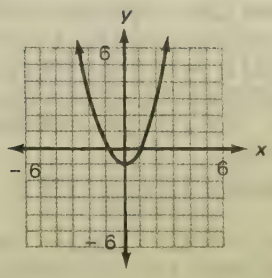
(1) $(-7/2, -1/4)$



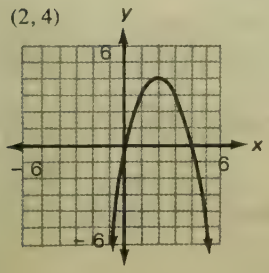
(3) $(2, -8)$



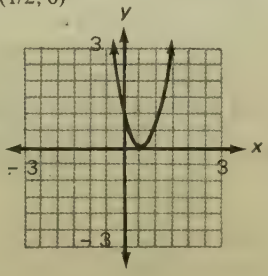
(5) $(0, -1)$



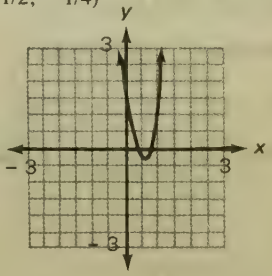
(7) $(2, 4)$



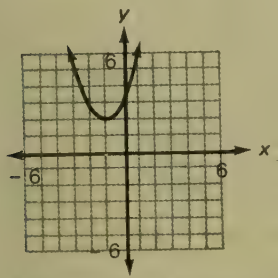
(9) $(1/2, 0)$



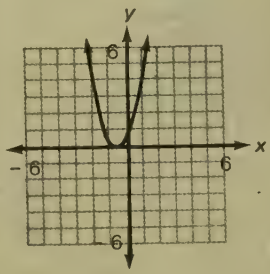
(11) $(1/2, -1/4)$



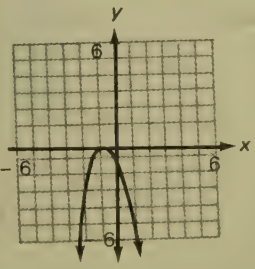
(13) $(-1, 2)$



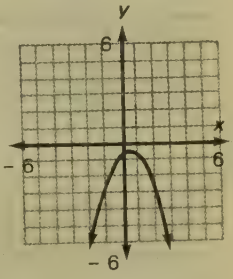
(15) $(-3/4, -1/8)$



(17) $(-3/4, 1/8)$

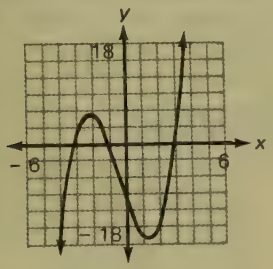


(19) $(1/2, -3/4)$

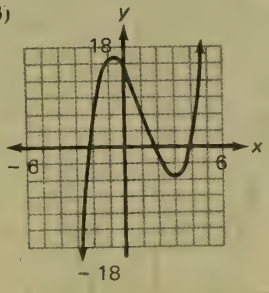


Sección 7.5 (pág. 334):

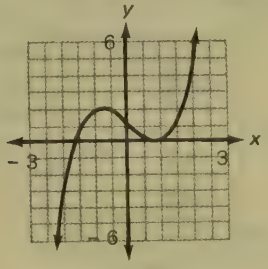
(1)



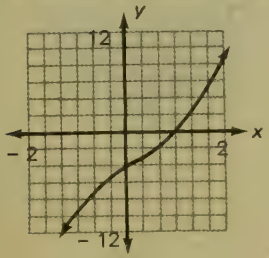
(3)



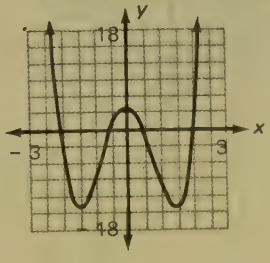
(5)



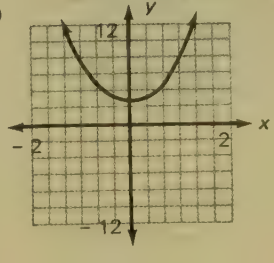
(7)



(9)



(11)



(13) Trazar el eje x de (0, 80) a (279, 80) y el eje y de (140, 0) a (140, 159); donde x toma los valores de -7 a 7 en incrementos de 0.05; $y = x^2 - 5x + 6$; trazar $(20x + 140, 20y + 80)$. **(15)** Trazar el eje x de (0, 80) a (279, 80) y el eje y de (140, 0) a (140, 159); donde x toma los valores de -14 a 14 en incrementos de 0.1; $y = x^3 - 5x + 6$; trazar $(10x + 140, 20y + 80)$. **(17)** Trazar el eje x de (0, 80) a (279, 80) y el eje y de (140, 0) a (140, 159); donde x toma los valores de -3.5 a 3.5 en incrementos de 0.025; $y = x^2 - 9$; trazar $(40x + 140, 20y + 80)$.

Sección 7.6 (pág. 338):

(1) ln 1.649 = 0.5 **(3)** ln 12.182 = 2.5 **(5)** ln 90.017 = 4.5
(7) ln 665.142 = 6.5 **(9)** $e^{0.405} = 1.5$ **(11)** $e^{1.253} = 3.5$
(13) $e^{1.705} = 5.5$ **(15)** $e^{3\ln 2}$ **(17)** $e^{5\ln 4}$ **(19)** $e^{9\ln 8.3}$ **(21)** $e^{4.1\ln 7.8}$ **(23)** $e^{-3\ln 7.45}$ **(25)** $e^{-8.1\ln 101.3}$ **(27)** EXP(0.5)
(29) EXP(−3.5) **(31)** EXP(−6.5) **(33)** LN(7.3) **(35)** EXP(4*LN(3)) **(37)** LN(0.5) **(39)** LN(5.5)
(41) EXP(360*LN(1 + R))

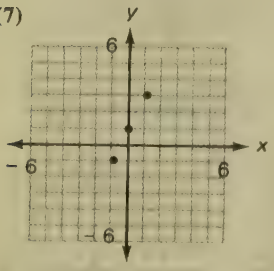
Sección 7.7 (pág. 345):

(1) 2.3 **(3)** 7 **(5)** 5.7 **(7)** 6.33 **(9)** sí **(11)** no
(13) no **(15)** 2 **(17)** −6 **(19)** 2 **(21)** −20 **(23)** 2
(25) −19 **(27)** 2 **(29)** −20 **(31)** 4.21 **(33)** 3.17 **(35)** −2.73

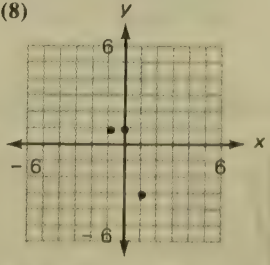
Prueba del capítulo 7 (pág. 347):

(1) sí **(2)** 5 **(3)** −8 **(4)** no **(5)** sí $\{x | x \in R, x \neq 1\}$
(6) sí, R

(7)

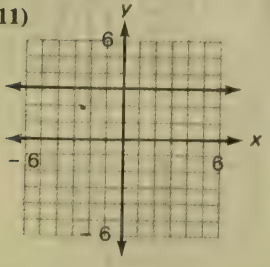


(8)

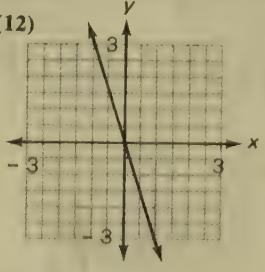


(9) no **(10)** sí

(11)



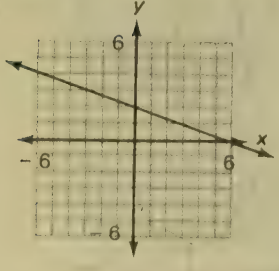
(12)



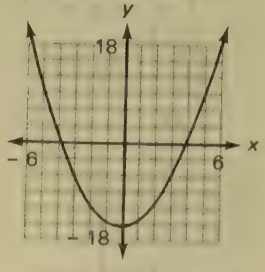
(13) $m = -1, b = 4$

(14) $m = 1/2, b = 3/2$

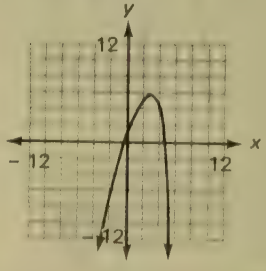
(15)



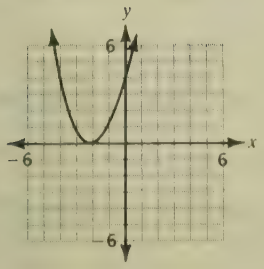
(16) (0, −16)



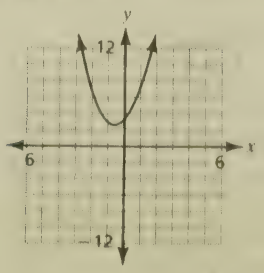
(17) (5/2, 25/4)



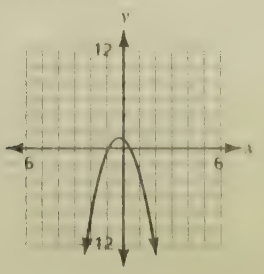
(18) (−2, 0)



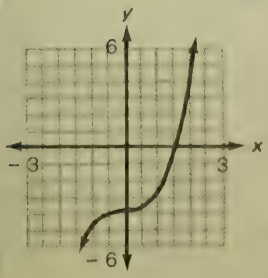
(19) (− 1/2, 5/2)



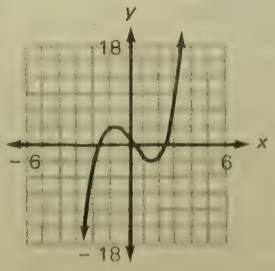
(20) (− 1/6, 13/12)



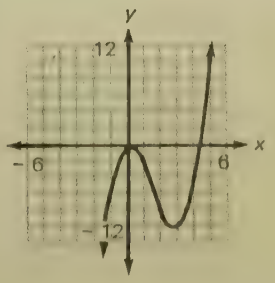
(21)



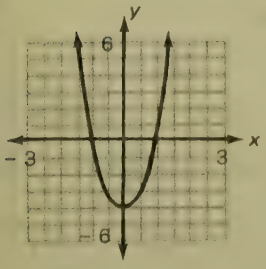
(22)



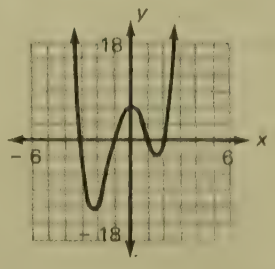
(23)



(24)

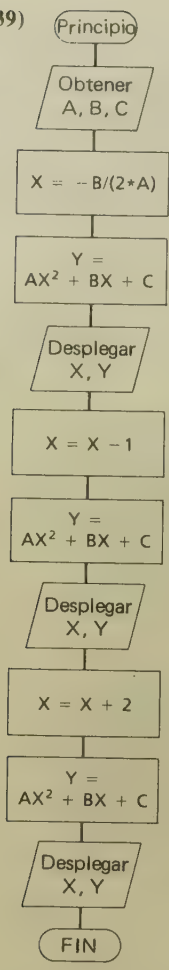


(25)



(26) Trazar el eje x de (0, 80) a (279, 80) y el eje y de (140, 0) a (140, 159); donde x toma los valores de -7 a 7 en incrementos de 0.05; $y = x^2 - 4x - 4$; trazar $(20x + 140, 20y + 80)$. **(27)** Trazar el eje x de (0, 80) a (279, 80) y el eje y de (140, 0) a (140, 159); donde x toma los valores de -7 a 7 en incrementos de 0.5; $y = 2x^2 - 4$; trazar $(20x + 140, 20y + 80)$. **(28)** Trazar el eje x de (0, 80) a (279, 80) y el eje y de (140, 0) a (140, 159); donde x toma los valores de -7 a 7 en incrementos de 0.05; $y = x^2$; trazar $(20x + 140, 20y + 80)$. **(29)** En 1808.04 = 7.5 **(30)** $e^{2.01} = 7.5$ **(31)** $e^{2.7\ \text{En}56} = 52{,}493.76$ **(32)** EXP(7.5) **(33)** LN(7.5) **(34)** a. 16.1 b. 16.1 **(35)** a. 4 b. -5 **(36)** a. 2 b. 2 c. -3 **(37)** no **(38)** $x = 5.73$

(39)



Capítulo 8

Sección 8.1 (pág. 358): **(1)** (3, 5) **(3)** (1/5, −1/5) **(5)** (1/5, 2/5) **(7)** inconsistente **(9)** dependiente **(11)** (3, 5) **(13)** (1/5, −1/5) **(15)** (1/5, 2/5) **(17)** inconsistente **(19)** dependiente **(21)** (−2, 3) **(23)** (0, 0)

Sección 8.2 (pág. 363): **(1)** (3, 2, −1) **(3)** (1, 1, 1) **(5)** (3, −3, −3) **(7)** (1/2, −1/2, 0) **(9)** (2/3, −1/3, 2) **(11)** (2, −1, 1)

Sección 8.3 (pág. 369): **(1)** (3, 2, −1) **(3)** (1, 1, 1) **(5)** (3, −3, −3) **(7)** (1/2, −1/2, 0) **(9)** (2/3, −1/3, 2) **(11)** (2, −1, 1)

Sección 8.4 (pág. 375):

(1) (2.60, 0.20) **(3)** (3.89, −0.33) **(5)** no converge
(7) (2.14, 1.71) **(9)** no converge **(11)** (1.60, 2.20)
(13) (2.70, 0.10) **(15)** no converge

Sección 8.5 (pág. 383):

(1) −5 **(3)** −2 **(5)** −2 **(7)** 14 **(9)** 1 **(11)** (3, 5)
(13) (1/5, 2/5) **(15)** dependiente **(17)** (18/17, −27/17)
(19) (1/2, −1/2, 0) **(21)** inconsistente **(23)** (2, −1, 0)

Sección 8.6 (pág. 390):

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$ **(3)** $\begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 \\ 6 & -2 & -2 \\ 0 & 12 & -7 \end{bmatrix}$ **(5)** $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **(7)** indefinido

(9) $\begin{bmatrix} 38 & 53 \\ 22 & -3 \end{bmatrix}$ **(11)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(13)** $\begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix}$ **(15)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$

(17) $\begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ **(19)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ **(21)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(23)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sección 8.7 (pág. 399):

(1) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ **(3)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ **(5)** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$ **(7)** $\begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(11)** $\begin{bmatrix} 0 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ **(13)** $\begin{bmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -7 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(15)** $\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 14/3 & -31/3 & 2 \end{bmatrix}$

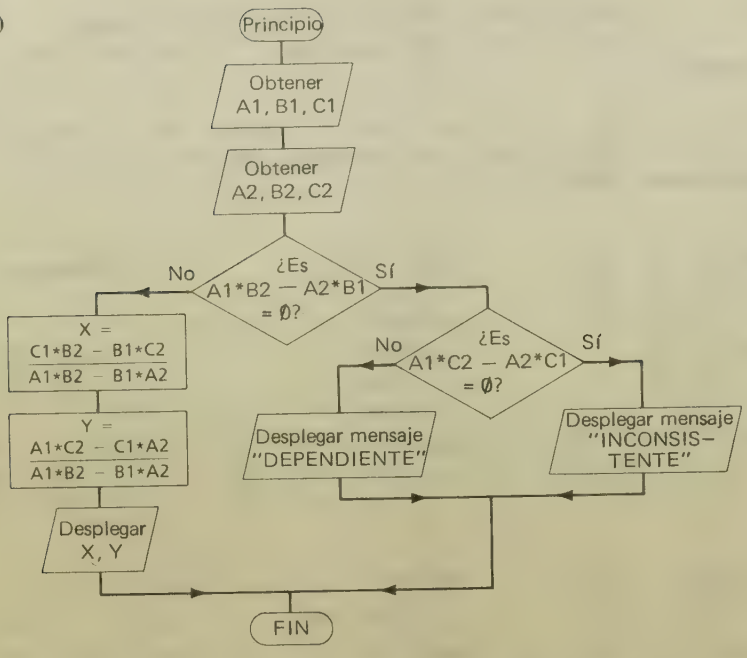
(17) (2/3, 1/2) **(19)** (1, −1) **(21)** (1/2, 1/3) **(23)** (2, 1, −1) **(25)** (2, 1, −1)

Prueba del capítulo 8 (pág. 402):

(1) (4,2) **(2)** (−3, −5) **(3)** (−3, −5) **(4)** inconsistente
(5) (2,4) **(6)** (1,1, −1) **(7)** (−2, −2, −4) **(8)** (1,2,3)
(9) dependiente **(10)** (2,1, −2) **(11)** (1,1, −1) **(12)** (−2, −2, −4) **(13)** (1,2,3) **(14)** dependiente
(15) (2, 1, −2) **(16)** (5.30, 1.10) **(17)** (2.30, 1.70) **(18)** (3.75, 1.25) **(19)** (1.25, 2.25)
(20) (−5.50, −6.50) **(21)** −5 **(22)** 11 **(23)** −47 **(24)** (5/4, 9/4) **(25)** (1, 2, 3)
(26) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(27)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -7 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ **(28)** indefinido **(29)** $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 18 & -15 \end{bmatrix}$ **(30)** $\begin{bmatrix} 9 & -4 & -3 \\ 9 & 10 & 18 \\ 7 & -9 & -4 \end{bmatrix}$

(31) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **(32)** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ -5 & 19 & -8 \end{bmatrix}$ **(33)** (−1, 2) **(34)** (2, 0) **(35)** (1, −1, 2)

(36)



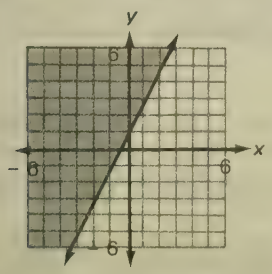
Capítulo 9

Sección 9.1 (pág. 410):

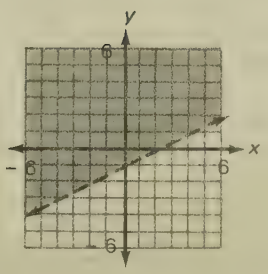
(1) Maximizar utilidades; x = número de cajas del primer tipo, y = número de cajas del segundo tipo, P = utilidad; $P = 3x + 2y$; $10x + 20y \leqslant 110$, $24x + 8y \leqslant 104$, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. **(3)** Maximizar utilidades; x = números de cajas normales, y = número de cajas especiales, P = utilidad; $P = 0.20x + 0.50y$; $(3/4)x + (1/2)y \leqslant 6000$; $(1/2)x + y \leqslant 4000$, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. **(5)** Maximizar utilidades; x = número de marcos de 5×7, y = número de marcos de 8×10, P = utilidad; $P = x + 2y$; $(1/2)x + (3/4)y \leqslant 480$, $(1/3)x + y \leqslant 480$; $x \geqslant 0, y \leqslant 0$. **(7)** Minimizar costos; x = onzas de queso manchego, y = onzas de queso suizo, C = costos; $C = 0.25x + 0.20y$; $210x + 270y \geqslant 1170$, $300x + 330y \geqslant 1560$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. **(9)** Minimizar costos; x = número de porciones de chocolate, y = número de porciones de cacahuates, C = costos; $C = 0.30x + 0.20y$; $104x + 26y \geqslant 234, x + 2y \geqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0$. **(11)** Minimizar costos; x = números de tazas de germen de trigo, y = número de tazas de leche en polvo, C = costos; $C = 0.41x + 0.34y$; $(3/2)x + (1/2)y = \geqslant 1, (1/2)x + (3/2)y \geqslant 1, x \geqslant 0y \geqslant 0$.

Sección 9.2 (pág. 416):

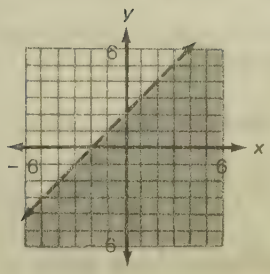
(1)



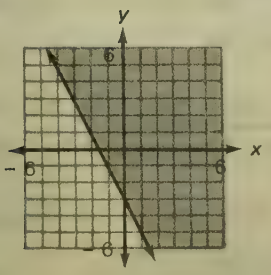
(3)



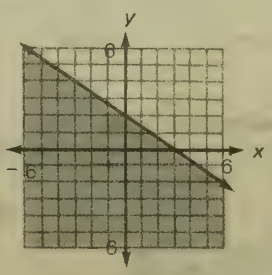
(5)



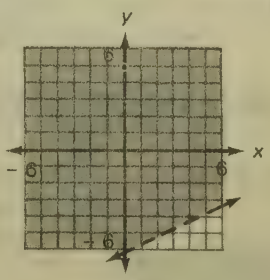
(7)



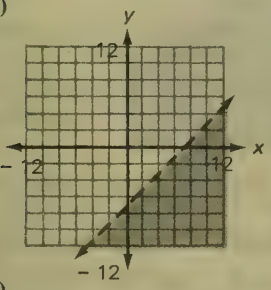
(9)



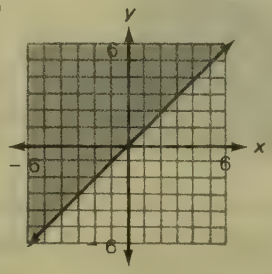
(11)



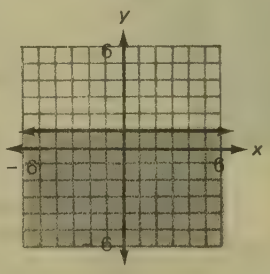
(13)



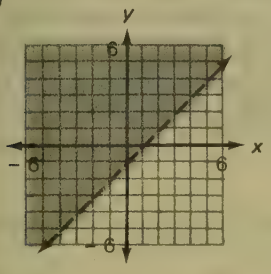
(15)



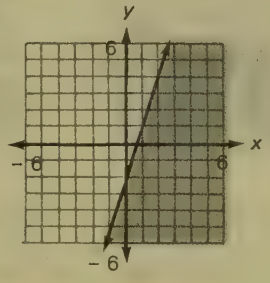
(17)



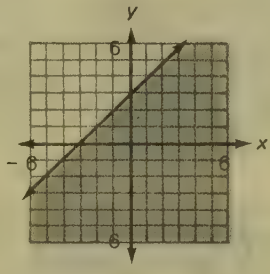
(19)



(21)



(23)



Sección 9.3 (pág. 422):

(1) $x = 2, y = 4$ **(3)** $x = 2, y = 6$ **(5)** $x = 18, y = 0$
(7) $x = 4, y = 0$ **(9)** $x = 2, y = 2$ **(11)** $x = 3, y = 1$
(13) $x = 3, y = 0$ **(15)** $x = 3, y = 3$

Sección 9.4 (pág. 426):

(1) $x = 3, y = 4$ **(3)** $x = 0, y = 4000$ **(5)** $x = 480, y = 320$
(7) $x = 0, y = 4\,8/11$ **(9)** $x = 2, y = 1$ **(11)** $x = 1/2, y = 1/2$

Sección 9.5 (pág. 433):

(1) $x = 2, y = 4, (x_1 = 0, x_2 = 0, P = 22)$ **(3)** $x = 8, y = 0, (x_1 = 0, x_2 = 24, P = 16)$ **(5)** $x = 8, y = 8, (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, P = 24)$ **(7)** 8 porciones de espagueti, 0 porciones de pizza ($x_1 = 0, x_2 = 1.25, P = 280$g) **(9)** 8 del estilo 1,6 del estilo 2 y 6 del estilo 3 $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, P = \$460)$

Sección 9.6 (pág. 437):

(1) $x = 3, y = 4\ (x_1 = 0, x_2 = 0, P = \$17)$ **(3)** $x = 0, y = 4000$ $(x_1 = 4000, x_2 = 0, P = \$2000)$ **(5)** $x = 480, y = 320\ (x_1 = 0, x_2 = 0, P = \$1120)$ **(7)** $x = 3, y = 0, z = 0, (x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, P = 9)$ **(9)** $x = 4, y = 7, z = 0, (x_1 = 9, x_2 = 0, x_3 = 0, P = 18)$ **(11)** $x = 5/3, y = 0, z = 4/3, (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 11/3, P = 14/3)$

Sección 9.7 (pág. 443):

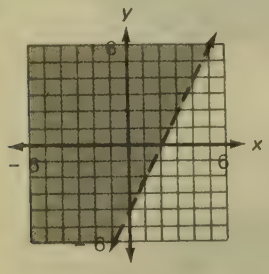
(1) 0 oz. de queso manchego, 52/11 oz. de queso suizo ($x_1 = 1170/11$, $x_2 = 0, C = 52/55$ o 0.95) **(3)** 2 porciones de chocolate, 1 porción de cacahuate. ($x_1 = 0, x_2 = 0, C = \$0.80$) **(5)** 1/2 taza de germen de trigo, 1/2 taza de leche en polvo. ($x_1 = 0, x_2 = 0, C = 3/8$ o 0.38) **(7)** $x = 4, y = 1, z = 0, (x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0, C = 6)$ **(9)** $x = 13/3, y = 1/3, z = 0, (x_1 = 0, x_2 = 19/3, x_3 = 0, C = 14/3)$ **(11)** $x = 1, y = 2, z = 0, (x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, C = 7)$

Prueba del capítulo 9 (pág. 444):

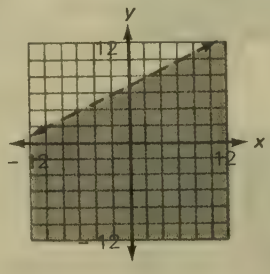
(1) Maximizar utilidades **(2)** x = número de emparedados normales, y = número de emparedados especiales, P = utilidades **(3)** $P = 0.50x + 0.60y$

(4) $6x + 8y \leq 1000, 2x + 3y \leq 360, x \geq 0, y \geq 0$ **(5)** Sí

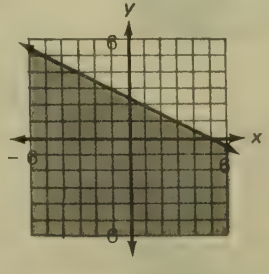
(6)



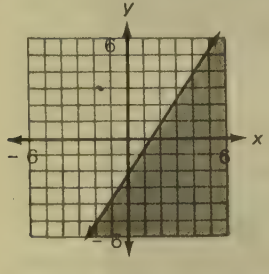
(7)



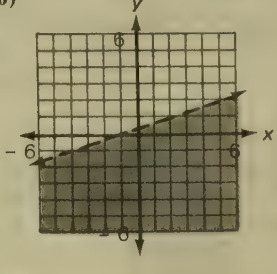
(8)



(9)



(10)

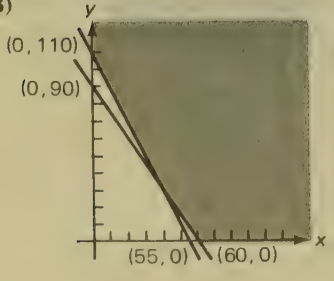


(11) $x = 4, y = 2$ **(12)** $x = 6, y = 0$

(13) $x = 2, y = 0$ **(14)** $x = 6, y = 0$

(15) $x = 6, y = 3$ **(16)** 166 2/3 de emparedados normales, no emparedados especiales **(17)** Minimizar costos; x = número de emparedados normales, y = número de emparedados dietéticos, C = costos; $C = 0.80x + 0.90y$; $(1/2)x + (1/3)y \geq 30, (1/4)x + (1/8)y \geq 55/4, x \geq 0, y \geq 0$

(18)



(19) $x = 60, y = 0$ **(20)** $x = 8, y = 0, (x_1 = 0, x_2 = 24, P = 24)$ **(21)** $x = 6, y = 0, (x_1 = 0, x_2 = 8, P = 30)$
(22) $x = 0, y = 7/3, (x_1 = 0, x_2 = 2/3, P = 7)$ **(23)** $x = 1, y = 0, z = 2, (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, P = 8)$
(24) $x = 0, y = 0, z = 9/4, (x_1 = 7/4, x_2 = 53/4, x_3 = 0, C = 27/2)$

Capítulo 10

Sección 10.1 (pág. 453): **(1)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **(3)** $\{R, R, R, W, W, W, W, B, B, B, B, B, B\}$ **(5)** $\{KH, QH, JH, KD, QD, JD, KS, QS, JS, KC, QC, JC\}$ **(7)** $\{BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG\}$ **(9)** $\{PN, PD, NP, ND, DP, DN\}$ **(11)** 1/6 **(13)** 4/9 **(15)** 1/4 **(17)** 1/3 **(19)** 1/3 **(21)** 0 **(23)** 1 **(25)** 3/4 **(27)** 2/3 **(29)** 4/13 **(31)** 1/13

Sección 10.2 (pág. 459): **(1)** 216 **(3)** 900 **(5)** 450 **(7)** 676,000 **(9)** 60 **(11)** 24 **(13)** 6 **(15)** 720 **(17)** 720 **(19)** 24 **(21)** 24 **(23)** 3 **(25)** 120 **(27)** 120 **(29)** 12 **(31)** 15 **(33)** 28 **(35)** 56 **(37)** 45 **(39)** 6

Sección 10.3 (pág. 464): **(1)** 1/4 **(3)** 1/36 **(5)** 1/16 **(7)** 0.132651 **(9)** 0.2499 **(11)** 4/169 **(13)** 1/36 **(15)** 1/12 **(17)** 16/663 **(19)** 1/66 **(21)** 1/11 **(23)** 1/12497500 **(25)** 1/24995000 **(27)** 1/10 **(29)** 1/10

Sección 10.4 (pág. 471): **(1)** 12 **(3)** 41 **(5)** 13 **(7)** 6 3/4 **(9)** 12 2/5 **(11)** 12 **(13)** 41 **(15)** 10 **(17)** 4 **(19)** 8 **(21)** ninguno **(23)** 32 **(25)** 10 **(27)** 1 **(29)** ninguno **(31)** mediana **(33)** media **(35)** media **(37)** media **(39)** moda

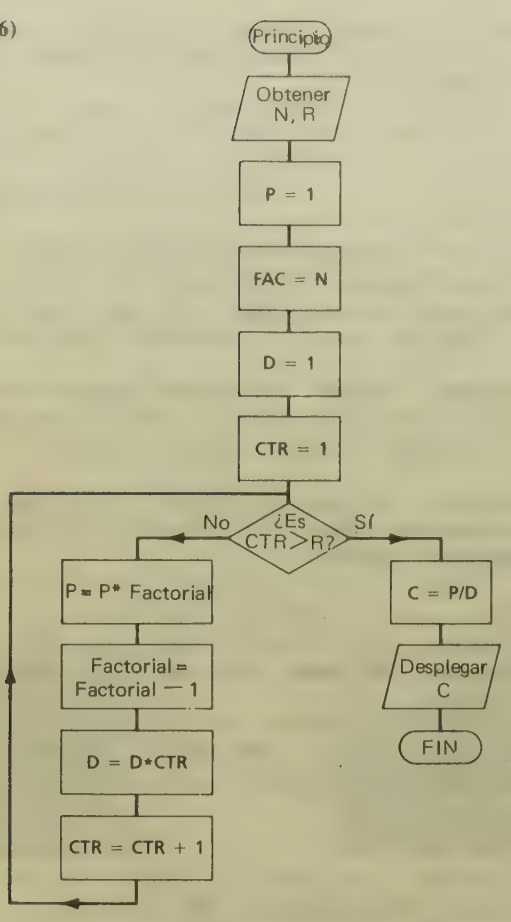
Sección 10.5 (pág. 476): **(1)** 12, 7 **(3)** 12, 24 **(5)** 43, 33 **(7)** 43, 28 **(9)** 55, 67 **(11)** 6 **(13)** 106 **(15)** 93 1/3 **(17)** 169 2/3 **(19)** 344 4/7 **(21)** $\sqrt{5}$ o aproximadamente 2.24 **(23)** $\sqrt{30.5}$ o aproximadamente 5.52 **(25)** 2 **(27)** $\sqrt{33\ 2/3}$ o aproximadamente 5.80 **(29)** $\sqrt{18\ 1/3}$ o aproximadamente 4.28

Sección 10.6 (pág. 483): **(1)** 1.50 **(3)** 2.50 **(5)** −2.75 **(7)** −1.43 **(9)** 2.43 **(11)** 4.7 por ciento **(13)** 81.6 por ciento **(15)** 6.7 por ciento **(17)** 7.6 por ciento **(19)** 33.2 por ciento **(21)** 36.7 por ciento **(23)** 92.7 por ciento **(25)** 62.5 por ciento **(27)** 33.7 por ciento

Sección 10.7 (pág. 489): **(1)** 10 min. 4.864 seg. — 10 min. 11.136 seg. y 10 min. 3.872 seg. — 10 min. 12.128 seg. **(3)** 10 min. 31.12 seg. — 10 min. 42.88 seg. y 10 min. 29.26 seg. — 10 min. 44.74 seg. **(5)** $842,752 — $877,248 y $837,296 — $882,704 **(7)** $22,916 — $24,484 y $22,668 — $24,732 **(9)** $14,206 — $14,794 y $14,113 — $14,887 **(11)** 0.99 **(13)** 0.95 **(15)** 0.99

Prueba del capítulo 10 (pág. 491): **(1)** $\{R, R, R, R, R, G, G, G, G\}$ **(2)** $\{1, 2, 3, 4\}$ **(3)** 5/9 **(4)** 0 **(5)** 1 **(6)** 65,000 **(7)** 6 **(8)** 12 **(9)** 10 **(10)** 21 **(11)** 1/4 **(12)** 1/216 **(13)** 9/169 **(14)** 11/221 **(15)** 4/17 **(16)** 7 **(17)** 7 **(18)** 4 **(19)** mediana **(20)** media **(21)** 43,31 **(22)** 132 **(23)** 98 **(24)** $\sqrt{306}$ o aproximadamente 17.49 **(25)** $\sqrt{15}$ o aproximadamente 3.87 **(26)** −1.5 **(27)** 2.33 **(28)** 0.1 por ciento **(29)** 2.3 por ciento **(30)** 62.5 por ciento **(31)** 108 — 112 **(32)** 77.02" — 78.98" **(33)** 161.08 kg — 168.92 kg **(34)** 0.98 **(35)** 0.98

(36)



Apéndice (pág. 499):

(1) 19 **(3)** −4 **(5)** −3 **(7)** −24 **(9)** −5 **(11)** 16 **(13)** −19 **(15)** 4 **(17)** 84
(19) −65 **(21)** −80 **(23)** −165 **(25)** −6 **(27)** 13 **(29)** 4 **(31)** −17

Índice analítico

Acertijos lógicos, 103
Acumulador, 20
Aditivo, 147
Álgebra
  booleana, propiedades de la, 127-132
  de matrices, 128
  observación respecto de la, 205
Algoritmo(s)
  de Karmakar, 437
  definición, 13
  diseño, 13
  empleo, 13
  peculiaridad, 12
Antecedente, 108
Archivo, 37
Argumento de la función, 307
Aritmética
  binaria, 161-170
  de complementos, 171-177
  de los números enteros, 77-81
  hexadecimal, 196-199
  octal, 191-196
ASCII, 155
Avance vertical/avance horizontal, 319

BASIC, 68
BCD, 191
Binomios, 224
Bits, 148
Boole, G., 95, 127, 128
Byte, 392

Ciclo, 19
Circuitos, 132-144
Codificación, 23
Coeficiente principal, 223
Comando MOD, 78
Combinaciones, 458
Complemento, 38, 40
  a dos, 174
  a uno, 174
Compuertas, 136
Conclusión, 117, 118
Condición, 20, 123
Condicional, 108-110
  falsa, 115
  formas alternativas, 110
Conectivos lógicos, 90
Conectores, 133
Conjunción, 90
Conjunto(s)
  de números, 53-56
  definición, 37
  dentro del conjunto universal, 44
  elementos, 39
  especificación, 37
  notación, 37-44
  universal, 44
  universo(∪), 40
Consecuente, 108
Contador, 19
Convención de lógica positiva, 136
Conversiones
  binarias, 186-190

decimales, 181-185
hexadecimales, 181-185, 186-190
octales, 181-185, 186-190
Coordenadas, 312
Cramer, G., 376
Cuadrantes, 312
Curva
de campana, 479
normal, características de la, 479-480

Dantzig, G., 426
Decisiones, 123-127
Declaración de asignación, 295-299
De Morgan, A., 47
Desigualdad, símbolos de, 255
Desigualdades lineales, 412-416
Desviación, 474
típica o estándar, 475, 476
Diagonal, 262
principal, 377
Diagrama(s)
de flujo, 25, 26
de Venn, 44-48
con tres conjuntos, 48-52
lógico, 136
Diferencia de cuadrados, 226
Dígitos significativos, 59-61
Distribución de frecuencias, 478
Disyunción, 90
Dominio, 305, 307, 308, 309, 314

EBCDIC, 155
Ecuación(es)
con expresiones racionales, 288-295
cuadráticas, 271-274
de grado superior, 281-287
equivalentes, 251
lineal, resolución de la, 251, 252, 253
solución, 251
y desigualdades lineales, 251-257
Elipsis, 37, 38
Enteros base dos, 147-155
Entradas. *Véase* Voltajes de entrada
Estructura
iterativa, 19
secuencial, 18
selectiva, 19
Eventos independientes, 461-464
Experimento, 449
espacio muestral, 450
Exponentes, 205-210
reglas adicionales, 210-215
Expresión(es) algebraica(s)
adición y multiplicación, 216-223
términos semejantes, 217
Expresión(es) racional(es)
característica, 228
definición, 228
multiplicación, 232
suma y resta, 235-242

Factores, 216
Factorización, 223-227
por aproximaciones sucesivas, 225
por tanteo, 225
Fibonacci, L., 36
Forma
anidada, 242
expandida, 242
normal, 271
Fórmula(s)
cuadrática, 275-281
definición, 257
resolución, 259
Fracciones base 2, 155-161
Función(es)
argumento, 307
cuadráticas, 324-327
cúbica, 328-329
de computadora, 340-345
de redondeo, 341
de truncación, 341, 342
definición, 305
dominio, determinación del, 308
exponencial, 336, 337
gráfica, 313
lineal, 318, 328
gráfica, 319
logarítmica, 336, 337
mayor que, 341
objetivo, 408
polinómicas y gráficas de computadora, 328-334

Gauss, C. F., 364
Googol, 64

Googolplex, 64
Graficación, 311-317, 417-421

Histogramas, 478-483

Identidad, 390
Inicialización de la variable, 19
Interruptor(es)
  características, 133
  combinación, 133
Intersección, 38
  con el eje *y*, 318
Intervalo(s)
  de clase, 478
  de confianza, 486
Iteración, 371

Juicio, 117
  válido, 118, 119

Kahan, W., 280
Karmakar, N. K., 437
Kilo, 392
Kowa, Seki, 376

Lambert, J. H., 54
Ley(es)
  de absorción, 129
  de Bernoulli. *Véase* Ley de los promedios
  de Bode, 261
  de De Morgan, 47, 101, 129
  de los números. *Véase* Ley de los promedios
  de los promedios, 464
Liber Abbaci, 36
Literales, 205
Logaritmo(s)
  comunes, 335
  concepto, 335
  natural, 336
Lógica simbólica, 89-93
Lukasiewicz, J., 70

Marca de final, 20
Matrices, 385-390
  inversas y ecuaciones matriciales, 393-399
Media
  de una población, estimación de la, 485-489
  muestral, 485
Mediana, 468
Medidas
  de dispersión, 473-476
  de tendencia central, 467-471
Método(s)
  de eliminación, 353
  de eliminación de Gauss, 364-369, 383
  de Gauss-Seidel, 371-375
  numéricos, 283n
  simplex, 426
    aplicación, 426, 427
    características, 438
    justificación, 434-437
    resumen, 439
Microprocesador, 89
Mínimo común denominador, 236
Moda, 469
Modus ponens, 121
Modus tollens, 121
Moneda regular, 451
Muestra, 485
Multiplicación del campesino ruso, 154

Negación, 90
Notación
  de conjuntos, 37-44
  científica, 58-59
    finalidad, 63
    utilización, 62
  polaca, 70
Numeración, sistemas de, 147-203
Numeral, 147
Número(s)
  cardinal del conjunto, 44
  con signo, 497-499
  enteros, aritmética de los, 77-81
  irracional, 54
  negativos, 177-181
  observación respecto de, 147
  primo, 228
  racional, 54, 228

Operación, 123
Operadores
  booleanos, 123, 124
  relacionales, 123

Orden
de las operaciones, 65-70
de los conectivos, 111
Ordenada al origen, 318
Origen, 312

Par ordenado, 312
Parábola, 324
cóncava, 325
convexa, 325
simétrica, 325
Paréntesis redondos, 67
Pascal, 68, 78, 336
Pascal, B., 171
Pendiente, 318
Perímetro, 309
Permutaciones, 456
Pitágoras, 36
Pitagóricos, 36
Pivote, 429
Pixels, 305, 331
Población, 467
estadística, 467
Poliedro, 262
Polígono, 262
Polinomio(s)
con una variable, 223
concepto, 223
en forma anidada, 242-246
Premisas, 117
Primos de Fermat, 311
Principios de conteo, 455-459
Probabilidad, 449-453
condicional, 461-464
Problemas
de minimización, 438-443
en lenguaje común, resolución de, 262-268, 423-426
Programación
estructurada, 18-23
lineal, 407-410
Propiedad(es)
asociativas, 51, 128
conmutativas, 50, 127-128
de campo, diversidad de las, 71-74, 75
de cerradura, 127
de complementación, 129
de idempotencia, 128-129
de los números reales, 70-71
de proporcionalidad, 407
del doble complemento, 129
distributivas, 50, 128
especiales, 129
Proposición, 89
compuesta, 90, 96
falsa, 89
simple, 90
verdadera, 89
Pseudocódigo, 24
Punto
binario, 155
muestral, 450

Rango, 305, 473
Recta numérica, 341
Región factible, 417, 420
Regla(s)
adicionales de exponentes, 210-215
de Cramer, 376-383
de Chio, 384, 385
de Sarrus, 378

Salida. *Véase* Valor de voltaje de salida
Serie de Fibonacci, 44
Shannon, C., 132
Signos de agrupación, 66
anidados, 66
Símbolo factorial, 456
Sistema(s)
de coordenadas cartesianas, 312
de coordenadas rectangulares, 312
de dos ecuaciones, 351-357
de ecuaciones lineales, 351
de módulo *n*, 79
de numeración, 147-153
de tres ecuaciones, 359-362
dependiente, 357
inconsistente, 357
octal, 181
Sobreflujo, 179
Sylvester, J. J., 385-386

Tabla(s)
de verdad, 95-103
con la condicional, 114-123
utilización, 117
inicial, 427
Tautología, 107
Teorema del límite central, 485, 486

Teoría de grupos, 81
Términos
  concepto, 216
  semejantes de una expresión algebraica, 217
Tres factorial, 456
Triángulo de Pascal, 317
Trinomios, 224

Unión, 38, 39

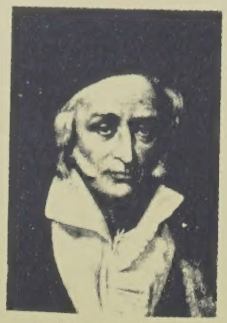
Valor de voltaje de salida, 136
Valores aleatorios, 480
Variable(s)
  básicas o diferentes de cero, 429
  concepto, 14
  de holgura, 427
  denominación, 14
  dependiente, 309
  estocástica, 467
  independiente, 309
  inicialización, 19
  pivote, 356
  z o normalizadas, 480
Varianza, 474
Venn, J., 44
Vértice, 325, 418
Voltajes de entrada, 136
Von Leibniz, G. W., 57, 376

Wallis, J., 235

Esta obra se terminó de imprimir
el día 4 de marzo de 1991,
en los talleres de Rotodiseño y color, S. A. de C. V.,
San Felipe núm. 26, Col. Xoco,
C. P. 03340, México, D. F.,
se encuadernó en Polymasters de México, S. A.,
Congreso núm. 252, Col. Federal,
C. P. 15700, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

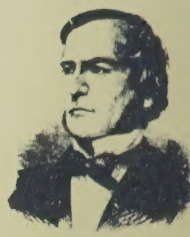
CO ROTO AL 50

Leonhard Euler
1707–1783



Carl Friedrich Gauss
1777–1855

Ada Byron
1815–1852



George Boole
1815–1864

Siglo XVIII

1703 Leibniz publica una descripción del sistema binario y generaliza la idea para otras bases.

1733 Abraham De Moivre escribe un opúsculo en el que formula el concepto de curva normal.

1734 Leonhard Euler introduce la notación $f(x)$ para funciones.

1750 Gabriel Cramer populariza el uso de determinantes (no en la notación moderna) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

1761 Johann Heinrich Lambert demuestra que π es irracional.

1796 Carl Friedrich Gauss descubre que es posible trazar un polígono de 17 lados utilizando únicamente compás y regla.

Siglo XIX

1824 Neils Henrik Abel demuestra que la ecuación general de quinto grado no puede resolverse algebraicamente.

1829 Peter Gustav Lejeune Dirichlet da una definición moderna de función.

1831 Evariste Galois enuncia las condiciones en las cuales una ecuación puede resolverse algebraicamente.

1834 Charles Babbage empieza a trabajar en su máquina analítica.

1842 Augusta Ada Byron publica sus notas sobre la máquina analítica de Babbage.

1854 George Boole publica *Las leyes del pensamiento*, donde se desarrolla la lógica y el álgebra booleanas.

1857 Arthur Cayley crea la teoría de matrices.

1874 Georg Cantor publica su primera obra, que lleva a la formulación de la teoría de conjuntos.

John von Neumann
1903–1957

Siglo XX

1936 Kontrad Zuse inicia la construcción de la primera computadora binaria.

1938 Claude Shannon utiliza el álgebra booleana en el diseño de circuitos eléctricos.

1942 La máquina ABC, construida para resolver sistemas de ecuaciones, es la primera calculadora digital electrónica.

1944 La MARK I, máquina electromecánica, es la primera computadora para fines generales, aunque su aplicación principal fue para calcular tipos especiales de funciones.

1946 John von Neumann formula el concepto de programa almacenado.

1947 George Dantzig desarrolla el método simplex para problemas de programación lineal.

1956 IBM desarrolla el FORTRAN para aplicaciones científicas.

1959 Grace Hopper desempeña un papel importante en el desarrollo del COBOL.

1964 John Kemeny y Thomas Kurtz desarrollan el BASIC en Dartmouth.

1971 La invención del microprocesador hace posible la creación de las microcomputadoras.

1984 Narendra Karmakar desarrolla un nuevo algoritmo de programación lineal.

El texto de Eleanor Ninestein es útil a los estudiantes que desean aprender las bases matemáticas para la programación de computadoras y áreas afines, porque sirve de enlace entre ambas disciplinas. Con un lenguaje accesible, la autora nos presenta un material que se caracteriza principalmente por su enfoque centrado en el pensamiento algorítmico más que en los algoritmos, donde se concede mayor importancia a la comprensión intuitiva de las ideas que a su desarrollo riguroso. A partir de esta obra es posible para el maestro diseñar cursos de matemáticas o de procesamiento de datos, con duración de un semestre si los alumnos tienen conocimientos sólidos de álgebra, o de dos semestres si requieren hacer una revisión de dicha materia; de la misma forma, puede resultar provechosa en grupos interdisciplinarios de ciencias y humanidades.

Contenido:

- Introducción
- Conjuntos
- Lógica y álgebra booleana
- Sistemas de numeración
- Polinomios
- Ecuaciones
- Funciones
- Sistemas de ecuaciones
- Programación lineal
- Probabilidad y estadística
- Respuestas de los ejercicios seleccionados

ISBN 968-24-3279-0